

Неделя 14. Вероятности (начало)

1. Вероятностное пространство: последовательности (x_1, x_2) длины 2, состоящие из целых чисел в диапазоне от 1 до 6. Все исходы равновозможны. («Подбрасывания двух игральных костей») Найдите вероятность события « $x_1 + x_2 = 5$ ».
2. Вероятностное пространство: последовательности (x_1, x_2, x_3, x_4) длины 4, состоящие из целых чисел в диапазоне от 1 до 6. Все исходы равновозможны. («Подбрасывания четырёх игральных костей») Найдите вероятность события « $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ чётно».
3. Вероятностное пространство: последовательности длины 6, состоящие из целых чисел в диапазоне от 0 до 1. Все исходы равновозможны. («Шесть подбрасываний монеты») Найдите вероятность события «выпало три единицы» (то есть ровно три элемента последовательности равны 1).
4. Вероятностное пространство: перестановки (a_1, a_2, \dots, a_n) чисел от 1 до n . Все исходы равновозможны. Найдите вероятность события « $a_2 > a_1 > a_3$ ».
5. Вероятностное пространство: последовательности длины 3, состоящие из целых чисел в диапазоне от 0 до 9 (не обязательно различных). Все исходы равновозможны. Найдите вероятность события «в последовательности встречается 1».
6. Вероятностное пространство: последовательности длины 3, состоящие из различных целых чисел в диапазоне от 0 до 9. Все исходы равновозможны. Найдите вероятность события «в последовательности встречается 1».
7. Вероятностное пространство: 3-элементные подмножества множества целых чисел в диапазоне от 0 до 9. Все исходы равновозможны. Найдите вероятность события «1 входит в множество».
8. Сравните вероятности событий в предыдущих трёх задачах.
9. Докажите, что случайный граф на n вершинах связан.

Точная формулировка: исходы — все неориентированные графы без кратных ребер с одним и тем же множеством вершин, в котором n элементов. Все исходы равновозможны. Нужно доказать, что вероятность события «граф несвязный» стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

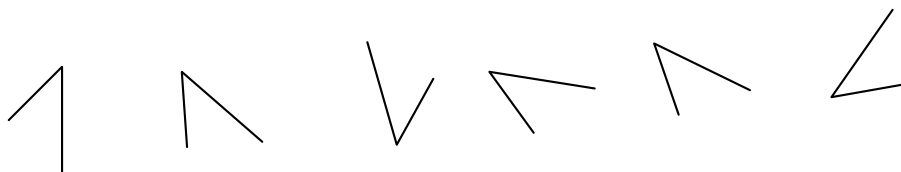
10. Вероятностное пространство состоит из всюду определённых функций $f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$. Все исходы равновозможны. Событие A_n : « $f(i) \neq i$ для всех i ». Найдите вероятность события A_n при больших n (более точно, найдите $\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr[A_n]$).

Домашнее задание 13

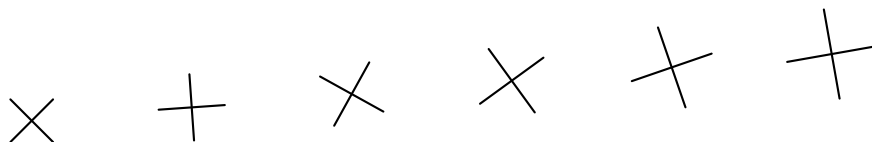
Срок сдачи: первая неделя после каникул

Напоминаем, что ответы на вопросы должны быть обоснованы.

- Докажите, что множество биекций $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ имеет мощность континуум.
- Можно ли расположить на плоскости континуум непересекающихся равных единиц? (Единицами называются фигуры, изображённые на рисунке, то есть пары отрезков с общим концом.)



- Крестом называется фигура, состоящая из двух диагоналей квадрата (см. рисунок). Можно ли расположить на плоскости континуум непересекающихся крестов (не обязательно одинакового размера)?



- Углом на плоскости называется фигура, состоящая из точки и двух исходящих из неё лучей. Можно ли расположить на плоскости континуум непересекающихся углов, таких чтобы никакие два из них не имели одинаковую градусную меру?

Во всех задачах части, относящейся к вероятности, ответом должно быть число (обыкновенная дробь).

- Вероятностное пространство: последовательности (x_1, x_2) длины 2, состоящие из целых чисел в диапазоне от 1 до 6. Все исходы равновозможны. Найдите вероятность события « $x_1 = x_2$ ».
- Вероятностное пространство: целые числа от 1 до 100. Все исходы равновозможны. Найдите вероятность события «сумма цифр числа равна 9».
- Вероятностное пространство: перестановки чисел от 1 до 24. Все исходы равновозможны. Найдите вероятность события «наибольшее среди первых 12 чисел в перестановке больше наибольшего среди последних 12 чисел».
- Вероятностное пространство: целые числа от 0 до 48. Все исходы равновозможны. Найдите вероятность события «частное от деления числа-исхода на 7 больше остатка (от деления того же числа)».
- Вероятностное пространство: убывающие последовательности длины 5, состоящие из различных целых чисел в диапазоне от 1 до 36 (каждое следующее число меньше предыдущего). Все исходы равновозможны. Найдите вероятность события «последовательность заканчивается на 1».
- Вероятностное пространство: неубывающие последовательности длины 5, состоящие из целых чисел в диапазоне от 1 до 36 (каждое следующее число не меньше предыдущего). Все исходы равновозможны. Найдите вероятность события «последовательность начинается на 1».
- Вероятностное пространство: матрицы 3×3 , элементы которых равны 0 или 1. Все исходы равновозможны. Найдите вероятность события «хотя бы одна из крайних линий целиком заполнена нулями» (крайние линии — это первый или третий столбец, первая или третья строка).
- Вероятностное пространство: двоичные слова длины 21. Все исходы равновозможны. Найдите вероятность события «на первых 10 позициях стоит меньше единиц, чем на последних 11».