

Неделя 16. Случайные величины и математическое ожидание

1. Про неотрицательную случайную величину X известно, что $\Pr[X < 5] = 1/2$ и $\Pr[X > 5] = 1/2$. Найдите возможные значения математического ожидания $E[X]$.
2. Каждый элемент n -элементного множества с вероятностью p независимо от других включается в множество S_p . Найдите математическое ожидание числа элементов в множестве S_p .
3. По 15 мальчиков и девочек стоят в шеренге в случайном порядке. Сколько в среднем девочек стоит левее всех мальчиков?
4. Выбирается случайное десятиэлементное подмножество S целых чисел от 0 до 29. Найдите математическое ожидание суммы чисел, входящих в S .
5. Студент за выполнение домашней работы получает оценку от 1 до 10. Средняя оценка за серию домашних работ оказалась равной 6. Докажите, что доля работ, оценка за которые меньше 4, не превосходит $4/7$.
6. В неориентированном графе без петель и кратных ребер n вершин и $nd/2$ ребер (то есть средняя степень вершины равна d), $d \geq 1$. Докажите, что найдется такой циклический обход вершин графа $(v_1 v_2 \dots v_n)$, в котором каждая вершина встречается ровно один раз и более $d/2$ из n пар (v_1, v_2) , (v_2, v_3) , \dots , (v_{n-1}, v_n) , (v_n, v_1) являются ребрами графа.
7. (Неравенство Чебышева.) Для случайной величины X обозначим $M = E[X]$, $D = E[X^2] - (E[X])^2$. Докажите, что

$$\Pr[|X - M| \geq a] \leq \frac{D}{a^2}.$$

8. Вероятностное пространство состоит из двоичных строк длины n , все строки равновозможны. Докажите, что вероятность события «количество единиц в строке отличается от $n/2$ не меньше, чем на \sqrt{n} » не превосходит $1/4$.
9. Рассмотрим последовательность a_0, a_1, \dots, a_n , где каждое $a_i \in \{0, 1\}^n$ — последовательность нулей и единиц длины n . Последовательность строится следующим образом. Первый член последовательности $a_0 = (0, 0, \dots, 0)$ — последовательность из одних нулей. Каждый следующий член a_{i+1} получается из a_i заменой значения одной случайно выбранной координаты на противоположное. Рассмотрим случайную величину X — количество единиц в последовательности a_n . Найдите $\lim_{n \rightarrow \infty} E[X]/n$.

Домашнее задание 15

Напоминаем, что ответы на вопросы должны быть обоснованы.

1. Игрок играет в казино в следующую игру. Делает ставку s , говорит крупье число от 1 до 6, после чего бросает три кубика. Если его число не выпало, то игрок ничего не получает. Если же число выпало, то игрок получает свою ставку обратно и получает выигрыш — за каждое выпадание числа, казино платит игроку ставку, которую он поставил. Так, если игрок поставил сто рублей и его число выпало два раза, то игрок получит выигрыш 200 рублей, а если не выпало ни разу, то его выигрыш — 100 рублей. Найдите математическое ожидание выигрыша игрока, при ставке 100 рублей.
2. В лотерее на выигрыши уходит 40% от стоимости проданных билетов. Каждый билет стоит 100 рублей. Докажите, что вероятность выиграть 5000 рублей (или больше) меньше 1%.
3. По таблицам смертности, составленным в 1693 г. Э. Галлеем, средняя продолжительность жизни была 26 лет. При этом вероятность прожить не больше 8 лет была $1/2$. Какова была средняя продолжительность жизни тех людей, которые прожили не меньше 8 лет? (Укажите интервал возможных при данных условиях значений, учитываются только полные годы.)
4. Выбирается случайное слово длины 20 в алфавите $\{a, b\}$ (все слова равновозможны). Найдите математическое ожидание числа подслов ab в этом слове.
5. *Инверсией* в перестановке $a_1 a_2 \dots a_n$ называется такая пара индексов $i < j$, что $a_i > a_j$. Пусть π — случайная перестановка (все перестановки равновозможны). Найдите математическое ожидание $E[I(\pi)]$ количества инверсий $I(\pi)$.
6. Пусть X — неотрицательная случайная величина. Известно, что $E[2^X] = 5$. Докажите, что

$$\Pr[X \geq 6] < 1/10.$$

7. Вероятностное пространство — перестановки (x_1, \dots, x_n) элементов от 1 до n . Найдите математическое ожидание чисел, не поменявших своё место. Формально, случайная величина — количество элементов множества $\{i \mid x_i = i\}$.
- 8*. В неориентированном графе без петель и кратных ребер графе n вершин и $nd/2$ рёбер (то есть средняя степень вершины равна d), $d \geq 1$. Докажите, что в графе есть независимое множество размера не меньше $n/2d$.

Подсказка. В решении этой задачи поможет случайное множество V_p , в которое каждая вершина входит с вероятностью p независимо от других вершин. (При подходящем значении параметра p .)