Дискретная математика **Основной поток**

Неделя 18. Эффективные схемы и разрешающие деревья

Если в условии задачи базис не указан, то нужно использовать схемы в стандартном базисе $\{\neg, \wedge, \vee\}$.

1. Постройте схему полиномиального размера для функции $\mathrm{MAJ}(x_1, \ldots, x_n)$. (Напомним, что эта функция равна 1 тогда и только тогда, когда больше половины её аргументов равны 1.)

2. Булева функция сравнения $L(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n)$ равна 1 тогда и только тогда, когда $(\overline{x_1, \ldots, x_n})_2 < (\overline{y_1, \ldots, y_n})_2$. Постройте схему размера $O(n)$, которая вычисляет $L(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n)$.

3. а) Постройте схему полиномиального размера, которая «сортирует» биты на входе: если на входе $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ какие-то k переменных принимают значение 1, то на выходе $(y_1, \ldots, y_n)$ первые k переменных равны 1, а остальные нули. **б)** Постройте описанную схему в базисе $\{\wedge, \vee\}$.

4. Среди n камней есть один радиоактивный. Счётчиком Гейгера мы можем проверить для любой кучки камней, если ли среди них радиоактивный. За какое наименьшее количество проверок можно найти радиоактивный камень?

5. В клетках шахматной доски написали в каком-то порядке числа от 1 до 64, каждое по одному разу. Про любое множество клеток доски мы можем спросить, какие числа на них стоят, и нам выдают полный список. За какое наименьшее количество вопросов можно понять, где какие числа стоят?

6. Вычисление булевой функции $f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ в модели разрешающих деревьев происходит следующим образом: за один вопрос разрешается спросить значение одной из переменных, в конце нужно объявить значение функции. Сложность вычисления функции — наименьшее количество вопросов в адаптивном (вопрос может зависеть от предыдущих ответов) протоколе, вычисляющем функцию.

а) Найдите сложность вычисления суммы по модулю два $\bigoplus_i x_i$ в модели разрешающих деревьев.

б) Пусть $n = k+2^k$. Указательная функция $f(x_1, \ldots, x_k, y_0, \ldots, y_{2^k-1})$ равна y_x, где x — число, двоичная запись которого $x_1 \ldots x_k$. Докажите, что сложность вычисления f в модели разрешающих деревьев не превосходит $k+1$.

в) Докажите, что сложность вычисления функции f из предыдущего пункта не меньше $k+1$.

7. Постройте схему полиномиального размера для указательной функции.

8. Докажите, что всякую функцию $f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ можно вычислить булевой схемой размера **а)** $O(n2^n)$; **б)** $O(2^n)$.

Дискретная математика **Основной поток**

Домашнее задание 17

Напоминаем, что ответы на вопросы должны быть обоснованы.

1. Треугольником в графе называется тройка вершин, попарно соединенных между собой. Рассмотрим вход функции $T\colon \{0,1\}^{\binom{n}{2}} \to \{0,1\}$ как неориентированный граф на n вершинах и положим $T(G) = 1$ тогда и только тогда, когда в G нет треугольников. Постройте схему полиномиального размера, которая вычисляет функцию T.

2. Булева функция вхождения подслова $W(u_1, \dots, u_\ell; x_1, \dots, x_n)$ равна 1 тогда и только тогда, когда двоичное слово $u_1 u_2 \dots u_\ell$ входит в двоичное слово $x_1 x_2 \dots x_n$, то есть для некоторого $0 \leqslant k \leqslant n - \ell$ выполняются равенства $x_{k+i} = u_i$. Постройте схему полиномиального размера, вычисляющую функцию W.

3. Булева функция $f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ называется симметрической, если ее значение не меняется при перестановке переменных. Докажите, что всякую симметрическую булеву функцию можно вычислить булевой схемой полиномиального от n размера.

4. Постройте схему полиномиального размера для функции $f\colon \{0,1\}^{\binom{n}{2}} \to \{0,1\}$, которая равна 1 тогда и только тогда, когда данный на вход граф раскрашиваем в два цвета.

5. Пусть числовой массив $a[1], \dots, a[n]$ строго унимодален. Это означает, что существует t, такое что

$$a[1] < a[2] < \dots < a[t] > a[t+1] > \dots > a[n-1] > a[n], \quad 1 \leqslant t \leqslant n.$$

Разрешается за один ход спросить значение одного элемента массива. Докажите, что можно найти значение максимального элемента $a[t]$ за не более $O(\log n)$ ходов.

6. Есть n монет, среди которых одна фальшивая. Настоящие монеты все имеют одинаковый вес, а фальшивая легче. За одно взвешивание можно сравнить по весу любые две монеты. Докажите, что фальшивую монету можно найти за $\lfloor n/2 \rfloor$ взвешиваний.

7. Докажите, что в условиях предыдущей задачи для нахождения фальшивой монеты необходимо $\lfloor n/2 \rfloor$ взвешиваний.

8. Найдите сложность вычисления дизъюнкции $\bigvee_{i=1}^{n} x_i$ в модели разрешающих деревьев.

9. Имеется n монет, среди которых одна фальшивая, и чашечные весы. Настоящие монеты все имеют одинаковый вес, а фальшивая легче. На каждую чашку весов можно класть произвольное количество монет. Докажите, что фальшивую монету можно найти за $\log_3 n + O(1)$ взвешиваний.

10*. Докажите, что в условиях предыдущей задачи для нахождения фальшивой монеты необходимо $\log_3 n + \Omega(1)$ взвешиваний.