**Дискретная математика** **Основной поток**

**Неделя 19. Вычислимые функции, разрешимые и перечислимые множества**

**Напоминание.** Вычислимые функции не обязательно всюду определены. В этом разделе мы обозначаем через $f : A \to B$ функцию, область определения которой некоторое подмножество множества $A$ (быть может пустое).

**1.** Докажите, что существует вычислимая в обе стороны биекция между множествами

**а)** $\mathbb{N}$ и $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$;

**б)** $\{0, 1\}^*$ и $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (воспользуйтесь композицией вычислимых функций);

**2.** Множество натуральных чисел $X$ разрешимо. Множество $Y$ состоит из чисел вида $n^2$, где $n \in X$. Разрешимо ли множество $Y$?

**3.** Пусть существует вычислимая биекция $f : \mathbb{N} \to A$ ($f^{-1}$ не обязательно вычислима). Докажите, что множество $A$ перечислимо. Постройте алгоритм перечисления множества $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

**4.** Докажите, что если $A$, $B$ — перечислимые множества, то и множества $A \cup B$, $A \cap B$ перечислимы.

**5.** Докажите, что если существует алгоритм перечисления элементов некоторого множества, то существует также и алгоритм, который перечисляет элементы этого множества без повторений.

**6.** Докажите, что алгоритм перечисления элементов множества $S \subseteq \mathbb{N}$ в возрастающем порядке существует тогда и только тогда, когда множество $S$ разрешимо.

**7.** Перечислимо ли множество таких натуральных $n$, что уравнение $x^n + y^{n+1} = z^{n+2}$ имеет решение в положительных целых числах?

**8.** Докажите, что множество булевых функций, имеющих схемную сложность $> 2^{n/2}$ в стандартном базисе, разрешимо. Здесь $n$ — количество переменных функции. Считайте, что алгоритм разрешения получает на вход булеву функцию в виде таблицы значений.

**9.** Всюду определенная функция $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ невозрастающая. Верно ли, что $f$ вычислима?

**Дискретная математика** **Основной поток**

**Домашнее задание 18**

Напоминаем, что ответы на вопросы должны быть обоснованы.

**1.** Докажите, что существует вычислимая в обе стороны биекция между множеством простых чисел и $\{0,1\}^*$.

**2.** Множество двоичных слов $X$ разрешимо. Множество $Y$ состоит из двоичных слов, некоторый префикс каждого из которых принадлежит множеству $X$. Разрешимо ли множество $Y$?

**3.** Пусть множество $X \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ перечислимо. Перечислимо ли множество $Y \subseteq X$ таких пар $(a, b) \in X$, что произведение $a \times b$ делится на 15?

**4.** Пусть множество $X$ двоичных слов перечислимо. Докажите, что тогда перечислимо и множество $P$ префиксов слов из $X$.

**5.** Докажите, что если $A$, $B$ — перечислимые множества, то и множество $A \times B$ перечислимо.

**6.** Существуют ли такие множества $X, Y \subseteq \mathbb{N}$, что $X$ разрешимо, $X \cup Y$ разрешимо, а $Y$ не разрешимо?

**7.** Пусть $S$ — разрешимое множество натуральных чисел. Множество $D$ состоит из всех простых делителей множества $S$. Верно ли, что $D$ перечислимо?

**8.** Докажите, что множество рациональных чисел, меньших $e$, разрешимо.