Неделя 20. Универсальная нумерация. Неразрешимые и неперечислимые множества

Напоминание. Вычислимые функции не обязательно всюду определены. В этом разделе мы обозначаем через $f : A \to B$ функцию, область определения которой некоторое подмножество множества A (быть может пустое).

1. Вычислима ли следующая функция?

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{если существует бесконечно много пар простых чисел } p,\ p+2, \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

2. Докажите, что множество таких программ на языке C размером меньше 1Gb, которые никогда не останавливаются, разрешимо. (Считайте, что программа исполняется на идеализированном компьютере, имеющем потенциально бесконечную память.)

3. Перечислимо ли множество таких натуральных n, что уравнение $x^n + y^{n+1} = z^{n+2}$ имеет решение в положительных целых числах?

4. Пусть U — универсальная вычислимая функция (универсальная нумерация). Докажите, что $U(p,p)$ не определено для некоторого p.

5. Докажите, что перечислимо множество программ, которые останавливаются хотя бы на одном входе. Более формально: пусть U — универсальная вычислимая функция, а S — множество тех p, для которых функция $U(p,x)$ определена хотя бы при одном x. Тогда S перечислимо.

6. Докажите, что множество $\{n \mid U(n,n) = n\}$ **а)** перечислимо; **б)** неразрешимо.

7. Докажите, что множество $\{n \mid U(n,n) \neq n\}$ неперечислимо.

8. Найдите разрешимое множество $A \subseteq \mathbb{N}$ и вычислимую всюду определённую функцию $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такие, что образ $f(A)$ неразрешим.

9. Пусть U — универсальная вычислимая функция (универсальная нумерация). Докажите, что множество Tot программ (номеров) всюду определённых вычислимых функций неперечислимо. Более точно, множество Tot состоит из таких p, что $U(p,x)$ определена для всех $x \in \mathbb{N}$.

10. Докажите, что проекция перечислимого множества $A \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ на первую координату перечислима. (Проекция A на первую координату определяется как $\{x \in \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N}\ (x,y) \in A\}$.)

11. Докажите, что функция вычислима тогда и только тогда, когда её график перечислим.

12*. а) Докажите, что существует функция $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, которая растет быстрее любой вычислимой. Это означает, что для любой вычислимой функции g найдётся такое N, что $f(x) > g(x)$ для всех $x > N$, принадлежащих области определения g.

б) Пусть функция f растёт быстрее любой вычислимой функции. Докажите, что $f(\mathbb{N})$ неразрешимо.

Дискретная математика **Основной поток**

Домашнее задание 19

Напоминаем, что ответы на вопросы должны быть обоснованы. Ссылка на утверждение, доказанное на лекции или в учебнике, считается обоснованием. Ссылка на утверждение задачи из классного листка обоснованием **не считается** — нужно воспроизвести рассуждение.

1. Докажите, что для любой универсальной вычислимой функции U множество $\{U(p,p) \mid p \in \mathbb{N}\}$ совпадает с $\mathbb{N}$.

2. Всюду определенная функция $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ строго возрастает и множество ее значений содержит все натуральные числа за исключением конечного множества. Докажите, что f вычислима.

3. Разрешимо ли множество $\{x \mid \exists p : U(p,x) = \downarrow\}$? (обозначение $f(x) = \downarrow$ означает, что вычислимая функция f определена в x.)

4. Докажите, что во всяком бесконечном разрешимом множестве натуральных чисел есть перечислимое неразрешимое подмножество.

5. Является ли множество $\{(p,q) \mid U(p,q) \neq U(q,p)\}$ **а)** разрешимым **б)** перечислимым? Мы считаем, что $U(p,q) \neq U(q,p)$ только если обе функции определены в соответствующих точках. (Пункты оцениваются как две отдельные задачи.)

6. Про множество $S \subseteq \mathbb{N}$ известно, что существует вычислимая функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, такая что $a \in S$ тогда и только тогда, когда для некоторого $x \leqslant a$ выполняется $f(x) = a$. Следует ли отсюда, что множество S **а)** перечислимо; **б)** разрешимо? (пункты оцениваются как две отдельные задачи)

7. Докажите, что бесконечное подмножество $\mathbb{N}$ разрешимо тогда и только тогда, когда оно является областью значений всюду определенной возрастающей вычислимой функции из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$.