Дискретная математика **Основной поток**

Неделя 21. Повторение. Главная универсальная нумерация.

Напоминание. Вычислимые функции не обязательно всюду определены. В этом разделе мы обозначаем через $f : A \to B$ функцию, область определения которой некоторое подмножество множества A (быть может пустое).

1. Найдите разрешимое множество $A \subseteq \mathbb{N}$ и вычислимую всюду определённую функцию $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такие, что образ $f(A)$ неразрешим.

2. Пусть U — универсальная вычислимая функция (универсальная нумерация). Докажите, что множество Tot программ (номеров) всюду определённых вычислимых функций неперечислимо. Более точно, множество Tot состоит из таких p, что $U(p, x)$ определена для всех $x \in \mathbb{N}$.

3. Докажите, что проекция перечислимого множества $A \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ на первую координату перечислима. (Проекция A на первую координату определяется как $\{x \in \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N}\ (x, y) \in A\}$.)

4. Пусть $U(x, y)$ — универсальная вычислимая функция. Докажите, что $V(x, y) = U(y, x)$ не является универсальной.

5. Пусть $\hat{U}(p, x)$ — главная универсальная вычислимая функция. Докажите, что неразрешимо множество тех программ, которые вычисляют функцию $x \mapsto x^2$. Более формально речь идёт о множестве

$$\{p \mid \hat{U}(p, x) = x^2 \text{ для всех } x\}.$$

6. Множество $\mathcal{A}$ состоит из номеров тех программ в главной нумерации $\hat{U}$, которые печатают свой текст. Формально

$$\mathcal{A} = \{n \mid \hat{U}(n, x) = n \text{ для всех } x\}.$$

Является ли свойство $\mathcal{A}$ нетривиальным (в смысле теоремы Успенского Райса)?

7. В задаче 5 недели 20 утверждается, что для любой универсальной функции перечислимо множество программ, которые останавливаются хотя бы на одном входе. Используя это утверждение и теорему Успенского–Райса, докажите, что для любой главной универсальной функция $\hat{U}$ множество

$$\{n \mid \hat{U}(n, x) \text{ не определена для любого } x\}$$

программ, задающих нигде не определенную функцию, неперечислимо.

Определение. Множество A *m-сводится* к множеству B ($A \leqslant_m B$), если существует такая всюду определённая вычислимая функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, что

$$x \in A \iff f(x) \in B.$$

8. Докажите, что если B – перечислимое множество и $A \leqslant_m B$, то множество A перечислимо.

9. Докажите, что если $A \leqslant_m B$, то $\bar{A} \leqslant_m \bar{B}$.

10. Докажите, что функция вычислима тогда и только тогда, когда её график перечислим.

Дискретная математика **Основной поток**

Домашнее задание 20

Напоминаем, что ответы на вопросы должны быть обоснованы. Ссылка на утверждение, доказанное на лекции или в учебнике, считается обоснованием. Ссылка на утверждение задачи из классного листка обоснованием **не считается** — нужно воспроизвести рассуждение.

1. Пусть f — вычислимая биекция между $\mathbb{N}$ и $\mathbb{N}$. Докажите, что обратная биекция f^{-1} также вычислима.

2. Пусть $\hat{U}(p, x)$ — главная универсальная вычислимая функция. Докажите, что найдется бесконечно много таких p, что $\hat{U}(p, x) = 2018$ для любого x.

3. Существует ли такая главная универсальная функция $\hat{U}(p, x)$, в которой множество программ I, вычисляющих тождественную функцию $f(x) = x$, совпадает с множеством чётных чисел? Более точно множество I задаётся как

$$I = \{p \mid \forall x\ \hat{U}(p, x) = x\}.$$

4. Докажите, что всякое бесконечное перечислимое множество содержит бесконечное количество непересекающихся бесконечных перечислимых множеств.

5. Пусть $\hat{U}(p, x)$ — главная универсальная вычислимая функция. Докажите, что для любой вычислимой функции трёх аргументов $V(m, n, x)$ найдётся такая всюду определённая вычислимая функция $s(m, n)$, что $V(m, n, x) = \hat{U}(s(m, n), x)$ для всех m, n, x.

6. Пусть $\hat{U}(p, x)$ — главная универсальная вычислимая функция. Обозначим через $K \subset \mathbb{N}^2$ множество таких пар (k, n), что функция $\hat{U}_k(x) = \hat{U}(k, x)$ является продолжением функции $\hat{U}_n(x) = \hat{U}(n, x)$ (т.е. $\hat{U}(k, x) = \hat{U}(n, x)$ если $\hat{U}(n, x)$ определена). Докажите, что множество K неразрешимо.