Неделя 23. Машины Тьюринга–2

Если в задаче сказано «постройте МТ», нужно привести таблицу переходов МТ и доказать корректность. Если в задаче сказано «докажите существование МТ», то таблицу переходов строить необязательно (и даже нежелательно). Учтите, что сама по себе таблица переходов не является доказательством чего бы то ни было! (Это вообще не утверждение.)

В условиях задач $\langle M\rangle$, $\langle x\rangle$ означают соответственно описание машины Тьюринга и входного слова в том формате, который был введён на лекции (и написан в черновике учебника).

1. Докажите, что существуют МТ, разрешающие следующие множества слов:

а) слова вида $\langle x\rangle$, где x — слово в некотором алфавите;

б) слова вида $\langle M\rangle$, где M — машина Тьюринга.

Разрешимость множества слов X машиной M означает, что M даёт результат 1 на словах из X и результат 0 на остальных словах.

2. Докажите существование МТ, которая по входу $\langle M\rangle\#\langle x\rangle\#1^t$ проверяет, останавливается ли машина M на входе x за t шагов.

3. Пусть имеется МТ M, которая вычисляет функцию $V(n,x)$ от двух переменных. Докажите, что существует такая МТ S, которая по входу n выдаёт как результат описание МТ M_n, вычисляющей функцию $f_n(x) = V(n,x)$.

4. Выведите неразрешимость проблемы остановки МТ напрямую из тезиса Чёрча–Тьюринга, не ссылаясь на существование универсальной машины или абстрактную теорию алгоритмов.

5. Пусть $T(\langle M\rangle, \langle w\rangle)$ — номер того такта работы машины Тьюринга M на входе w, на котором головка в последний раз оказывается над пустым символом. (Если головка никогда не оказывается над пустым символом или оказывается над ним бесконечно много раз, функция T на паре $(\langle M\rangle, \langle w\rangle)$ не определена.) Вычислима ли функция $T(\langle M\rangle, \langle w\rangle)$?

Примечание. Для упрощения рассуждений в решении этой задачи разрешается ссылаться на тезис Чёрча–Тьюринга.

6. *Клеточный автомат* задаётся всюду определенной функцией $C\colon A\times A\times A \to A$, где A — некоторое конечное множество (алфавит). Мы считаем, что в алфавите есть такой символ $\Lambda \in A$ (пустой символ), для которого $C(\Lambda,\Lambda,\Lambda) = \Lambda$.

Автомат работает на бесконечной в обе стороны ленте, ячейки которой заполнены символами из алфавита A. Состояние ленты изменяется по следующему правилу: если в момент времени $t-1$ в ячейках с номерами $i-1$, i, $i+1$ записаны символы x, y, z, то в момент времени t в ячейке с номером i записан символ $C(x,y,z)$. (Правило применяется ко всем ячейкам одновременно.)

Если в начальный момент на ленте записано слово $x \in (A\setminus\Lambda)^*$, а остальные ячейки пустые, а в некоторый момент времени состояние ленты не изменилось и на ленте написано слово $y \in (A\setminus\Lambda)^*$, а остальные ячейки пустые, то говорим, что клеточный автомат на входе x выдаёт результат y. В противном случае результат работы автомата не определён. Таким образом, автомат вычисляет функцию из слов в алфавите $(A\setminus\Lambda)^*$ в слова в том же алфавите.

а) Докажите, что для любого клеточного автомата C существует машина Тьюринга M_C, которая вычисляет ту же функцию, что и автомат C.

б) Докажите, что для любой машины Тьюринга M существует клеточный автомат C_M, который вычисляет ту же функцию, что и машина M.

Дискретная математика **Основной поток**

Домашнее задание 22 (бонусное)

Внимание! Это бонусное задание. Его результаты будут добавлены в сумму баллов за все задания, но при усреднении оно не будет учитываться (сумма будет делиться на 10, хотя вклад вносят 11 заданий).

Напоминаем, что ответы на вопросы должны быть обоснованы.

В решениях задач этого задания разрешается в качестве обоснования ссылаться на результаты задач классного занятия 23.

Использование тезиса Чёрча–Тьюринга в качестве обоснования возможно лишь в тех задачах, где это явно разрешено. (В остальных запрещено.)

1. Пусть машины M_1 и M_2 вычисляют функции $f_1 \colon B^* \to \{0,1\}$ и $f_2 \colon B^* \to \{0,1\}$. Докажите, что существует МТ M, которая вычисляет дизъюнкцию $f_1 \vee f_2$ этих функций.

2. Разрешимо ли множество описаний МТ, которые при работе на пустом входе не изменяют положение головки на ленте? (Разрешается ссылаться на тезис Чёрча–Тьюринга.)

3. Разрешимо ли множество описаний МТ, которые на любом входном слове работают не дольше 2016 тактов? (Разрешается ссылаться на тезис Чёрча–Тьюринга.)

4. Докажите, что неразрешима проблема остановки МТ на пустом входе. Формально: не существует машины Тьюринга, которая получает на вход описание машины Тьюринга M и даёт результат 1, если M останавливается на пустом входе, и результат 0 в противном случае.

5. Пусть $T_a(\langle M \rangle, \langle w \rangle)$ — номер того такта работы машины Тьюринга M на входе w, на котором головка в первый раз оказывается над символом a. (Если головка никогда не оказывается над символом a, функция $T_a(\langle M \rangle, \langle w \rangle)$ не определена.) Вычислима ли функция $T_a(\langle M \rangle, \langle w \rangle)$?

6. Докажите, что существует МТ, которая вычисляет биекцию $c \colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, где

$$c \colon (x, y) \mapsto \binom{x+y+1}{2} + y.$$

Числа заданы в унарной записи (т.е. n записывается как слово 1^n).

7. Докажите, что существует МТ, которая на любом входе выдаёт в качестве результата своё описание.