Дискретная математика **Основной поток**

Неделя 24. Машины Тьюринга–3

В условиях задач $\langle M\rangle$, $\langle x\rangle$ означают соответственно описание машины Тьюринга и входного слова в том формате, который был введён на лекции (и написан в черновике учебника).

В решениях задач этого листка разрешается ссылаться на тезис Чёрча–Тьюринга.

1. Машина Тьюринга только читает вход, если ее таблица переходов на всей области определения удовлетворяет такому свойству: $\delta(a,q) = (a,q',d)$ для любого символа a. Разрешима ли проблема остановки для машин Тьюринга, которые только читают вход? (Более точно, существует ли алгоритм, который по описанию $\langle M\rangle$ машины, которая только читает вход, и описанию ее входного слова $\langle x\rangle$, определяет, остановится ли M на входе x.)

2. Машина Тьюринга пишет только в свободные ячейки, если ее таблица переходов на всей области определения удовлетворяет такому свойству: $\delta(a,q) = (a,q',d)$ для любого непустого символа a. Разрешима ли проблема остановки для машин Тьюринга, которые пишут только в свободные ячейки?

3. Перечислимо ли множество описаний тех машин Тьюринга, которые при работе на пустом входе порождают бесконечную периодическую последовательность конфигураций?

4. Докажите, что перечислимо множество описаний машин Тьюринга, которые останавливаются хотя бы на одном входе.

5. Пусть граф на множестве слов в алфавите $\{0,1\}$ задан набором правил подстановки
$$\{010 \to 101,\ 101 \to 010\}.$$
Докажите, что задача достижимости для такого графа разрешима.

6. Разрешима ли задача достижимости для графов, заданных правилами подстановки вида $u \to a$, где где a — символ алфавита, u — непустое слово?

7. Докажите, что алгоритмически неразрешима задача достижимости для графов, заданных правилами подстановки в алфавите из двух символов.

Дискретная математика **Основной поток**

Домашнее задание 23 (на повторение)

Уведомление. Это задание не будет проверяться и не будет учитываться в итоговой оценке по курсу. Задание предназначено для подготовки к экзамену, решения задач будут обсуждаться на лекциях и семинарах.

1. Найдите максимальное количество рёбер в ациклических ориентированных графах на n вершинах. (Напомним, что по использованному в курсе определению параллельных рёбер в графе нет.)

2. Найдите НОД$(\underbrace{11\ldots11}_{\text{120 штук}}, \underbrace{11\ldots11}_{\text{84 штуки}})$. (Числа записаны в десятичной системе счисления.)

3. В множестве из n элементов выбрано $2^{n-1}+1$ подмножество. Докажите, что среди этих подмножеств есть два непересекающихся.

4. Булева функция $U_2(x_1, \ldots, x_n)$ равна 1 тогда и только тогда, когда среди значений $x_1, \ldots, x_n$ есть ровно 2 единицы. Постройте схему размера $O(n)$, вычисляющую функцию U_2.

5. Том Сойер красит забор, состоящий из 20 досок. Покрасив очередную доску, он с вероятностью $4/5$ переходит к следующей доске, а с вероятностью $1/5$ уходит купаться (и больше забор не красит). Найдите математическое ожидание количества покрашенных досок. (Обратите внимание, что по правилам хотя бы одну доску он покрасит.)

6. Известно, что функция $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ невычислима. Верно ли, что множество её значений

$$f(\mathbb{N}) = \{y : y = f(x) \text{ для некоторого } x\}$$

неразрешимо?

7. Пусть $U(p, x)$ — универсальная вычислимая функция. Докажите, что перечислимо множество тех программ, которые вычисляют функцию, не равную 0 на всей области определения. (Формально это множество таких чисел p, что $U(p, x)$ определена для некоторого x и ее значение $U(p, x) \neq 0$.)

8. Множество $\mathbb{R}$ действительных чисел разбито на два множества A и B, то есть $A \cup B = \mathbb{R}$, $A \cap B = \varnothing$. Докажите, что хотя бы одно из множеств A или B имеет мощность континуум.