

## Программа "зимнего" коллоквиума по дискретной математике(основной поток)

*В начале коллоквиума Вы получите билет, в котором будет три вопроса: контрольный вопрос на понимание определения, задача на понимание теорем и доказательств, вопрос на знание доказательств (нужно будет доказать теорему из курса). На подготовку ответа у Вас будет около часа. Коллоквиум Вы сдаете устно одному из преподавателей.*

*Оценка за коллоквиум формируется следующим образом. Вы получаете свой первый балл как только приходите на коллоквиум, еще 2 балла — за полный ответ на контрольный вопрос на понимание определений, 3 балла — за правильное решение задачи, ну и последние 4 балла — за полный ответ на вопрос на знание доказательств.*

*По правилам НИУ ВШЭ при обнаружении факта списывания за коллоквиум ставится 0 баллов.*

# 1. Список определений

Контрольный вопрос на понимание определений включает в себя формулировку одного определения из списка ниже и контрольный вопрос по этому определению. Пример: «Определение полного прообраза. Пусть  $f(x) = x^2$  — функция из  $\mathbb{Z}$  в  $\mathbb{Z}$ . Найдите полный прообраз множества  $\{1, 2, 3, 4\}$ .»

1. Логические операции: конъюнкция, дизъюнкция и отрицание
2. Логические операции: импликация, XOR (исключающее иле) и эквивалентность
3. Булевы функции. Задание таблицей истинности и вектором значений
4. Существенные и фиктивные переменные булевой функции
5. Дизъюнктивная нормальная форма
6. Множество, подмножество, равенство множеств
7. Операции с множествами: объединение, пересечение, разность, симметрическая разность. Диаграммы Эйлера-Венна
8. Законы Моргана (с обобщением на произвольное семейство множеств)
9. Закон контрапозиции.
10. Правило суммы
11. Метод математической индукции
12. Формула включений и исключений
13. Правило произведения
14. Комбинаторные числа. Число перестановок, число подмножеств размера  $k$  у  $n$ -элементного множества
15. Характеристическая функция и её использование при подсчёте числа элементов множества.
16. Функции. Область определения и множество значений.
17. Биномиальные коэффициенты, основные свойства. Бином Ньютона.
18. Треугольник Паскаля. Рекуррентное соотношение.
19. Образы и прообразы множеств. Полный прообраз.
20. Отображения (всюду определённые функции). Инъекции, сюръекции и биекции.
21. Бинарные отношения. Транзитивность, симметричность, рефлексивность.

22. Теоретико-множественные операции с отношениями. Операция обращения.
23. Композиция бинарных отношений
24. Отношения эквивалентности.
25. Графы. Основные определения: ребра, вершины, степени вершин.
26. Пути и циклы в графах.
27. Отношение достижимости (связанности) и компоненты связности графа.
28. Правильные раскраски графов. Формулировка критерия 2-раскрашиваемости.
29. Двудольные графы. Двудольные и двураскрашиваемые графы.
30. Подграфы. Изоморфизм графов. Клики и независимые множества.
31. Эйлеровы циклы.
32. Деревья. Полные бинарные деревья (см. ДЗ 9).
33. Ориентированные графы, основные определения.
34. Компоненты сильной связности ориентированного графа.
35. Отношения частичного порядка (строгие и нестрогие), линейные порядки.
36. Отношение непосредственного следования (см. листок недели 10).
37. Изоморфные отношения частичного порядка (см. листок недели 10).

## 2. Примерные задачи на понимание материала курса

На коллоквиуме Вам может попасться похожая по уровню задача не из этого списка.

1. Докажите, что **а)**  $x \rightarrow y = \bar{x} \vee y$ ; **б)**  $\overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y}$  **в)**  $\overline{x \rightarrow y} = x \wedge \bar{y}$ .

2. Булева функция задана вектором значений:  $f(x_1, x_2, x_3) = 10100101$ .

Опишите  $f$  через **а)** таблицу истинности;

**б)** Дизъюнктивную нормальную форму (ДНФ);

**в)** Конъюнктивную нормальную форму (КНФ).

Какие переменные  $f$  являются **г)** существенными; **д)** фиктивными?

3. Найдите количество последовательностей длины  $k$ , которые состоят из различных элементов  $n$ -элементного множества.

4. Под числом  $A$  в треугольнике Паскаля стоит число  $B$ . Может ли так случиться, что  $10A < B$ ? (Напомним, что соседние строки в треугольнике Паскаля сдвинуты так, что число в нижней строке стоит между числами в верхней строке. Поэтому строка, в которой стоит  $B$ , находится через одну от строки, в которой стоит  $A$ .)

5. Сколько есть путей по целым точкам прямой, которые начинаются в  $0$ ; заканчиваются в  $n$ ; каждый шаг направлен вправо и имеет целую положительную длину?

6. Сколько есть путей, состоящих из  $k$  шагов, которые идут по целым точкам прямой, которые начинаются в  $0$ ; заканчиваются в  $n$ ; каждый шаг направлен вправо и имеет целую положительную длину?

7. Выразите характеристическую функцию  $\chi_{A \Delta B}(x)$  через  $\chi_A(x)$ ,  $\chi_B(x)$  и **а)** операции  $\wedge, \vee, \neg$ ;

**б)** арифметические операции  $+, -, \times$ .

8. Докажите, что если какое-то равенство, содержащее переменные для множеств и операции  $\cap, \cup, \setminus$ , неверно, то можно найти контрпример к нему, в котором множества пусты или состоят из одного элемента.

9. Функция  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  отображает число  $n$  в наибольший простой делитель числа  $n$ . Найдите полный прообраз  $f^{-1}(E)$ , где  $E$  — множество четных чисел.

10. Пусть  $f$  — функция из множества  $A$  в множество  $B$ ,  $X, Y \subseteq A$ ,  $U, V \subseteq B$ . Верны ли для любых множеств  $f, A, B, X, Y, U, V$  следующие утверждения

**а)**  $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$ ;

**б)** из равенства  $f(X) = f(Y)$  следует  $X \cap Y \neq \emptyset$ ;

**в)**  $f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$ ;

**г)** из равенства  $f^{-1}(U) = f^{-1}(V)$  следует  $U = V$ .

11. Функция  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  отображает число  $n$  в наибольший простой делитель числа  $n$ . Функция  $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  отображает число  $n$  в наименьший простой делитель числа  $n$ . Верно ли, что  $g \circ f \circ g = f \circ g$ ?

12. Пусть  $P_1$  и  $P_2$  — отношения эквивалентности. Докажите, что следующие условия равносильны:

(i) Если классы эквивалентности  $P_1$  и  $P_2$  пересекаются, то один из них содержится в другом.

(ii)  $P_1 \cup P_2$  — отношение эквивалентности.

13. Верно ли, что композиция сюръективного и инъективного отображений инъективна?

14. Сколько существует функций из  $n$ -элементного множества в  $k$ -элементное?

15. Найдите количество **а)** неубывающих инъекций  $f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, m\}$ ; **б)** неубывающих сюръекций  $f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, m\}$ .

Функция неубывающая, если  $x \leq y$  влечет  $f(x) \leq f(y)$ .

16. Пусть  $f : A \rightarrow B$  – некоторое отображение. Будут ли следующие отношения отношениями эквивалентности на множестве  $A$ :

$$\text{а) } x \sim_f y \iff f(x) = f(y); \quad \text{б) } x \sim_{\bar{f}} y \iff f(x) \neq f(y)?$$

В случае положительного ответа на вопрос, опишите классы эквивалентности для соответствующего отношения.

17. Есть ли такой неориентированный связный граф на 20 вершинах с 28 ребрами, в котором есть 6 вершин, попарно соединенных ребром?

18. Постройте дерево диаметра 8, в котором степени всех вершин не больше 3, а всего вершин 31. (Диаметр — длина наибольшего простого пути.)

19. Приведите пример дерева на 2017 вершинах, к которому нельзя добавить ребро так, чтобы получился 2-раскрашиваемый граф.

20. В ориентированном графе на 16 вершинах исходящие и входящие степени вершин равны 1. Сколько ребер в этом графе?

21. *Остовным деревом* называют подграф графа, который является деревом на всех вершинах исходного графа. Докажите, что любой связный граф имеет остовное дерево

22. Приведите пример ациклического ориентированного графа, к которому нельзя добавить ребро так, чтобы граф остался ациклическим.

23. Для каких  $n$  в булевом кубе размерности  $n$  есть эйлеров цикл? Для всякого такого  $n$  постройте эйлеров цикл.

24. Сколько существует различных нестрогих частичных порядков на множестве  $V = \{0, 1, 2\}$ ? Мы считаем порядки  $P$  и  $Q$  различными, если они не изоморфны друг другу. Постройте графы  $\langle V, S_P \rangle$  для каждого порядка  $P \subseteq V \times V$ . Здесь  $S_P$  – отношение непосредственного следования.

25. Сколько есть порядков на  $n$ -элементном множестве, в которых ровно одна пара элементов несравнима?

### 3. Вопросы на знание доказательств.

1. Разложение в ДНФ булевой функции
2. Обобщённый закон Моргана
3. Формула включений и исключений
4. Число  $k$  элементных подмножеств  $n$ -элементного множества есть  $\binom{n}{k}$
5. Бином Ньютона. Формула для биномиальных коэффициентов.
6. Основные свойства треугольника Паскаля: симметричность строк, возрастание чисел в первой половине строки.
7. Основные свойства треугольника Паскаля: формула для суммы чисел в строке, нижняя оценка на центральный коэффициент:
$$\binom{2n}{n} \geq \frac{2^{2n}}{2n+1}$$
8. Число решений уравнения  $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$  в неотрицательных целых числах. (Задача Муавра.)
9. Основная теорема об отношениях эквивалентности (классы эквивалентности на множестве  $A$  — в точности разбиения множества  $A$  на подмножества)
10. Нижняя оценка числа связных компонент в неориентированном графе.
11. Доказательство критерия 2-раскрашиваемости неориентированного графа.
12. Если  $G$  — минимально связный граф (удаление любого ребра приводит к несвязности), то  $G$  не содержит простых циклов длины больше двух
13. Если  $G$  — связный граф, который не содержит простых циклов длины больше двух, то между любыми двумя вершинами  $G$  существует единственный простой путь.
14. Если между любыми двумя вершинами  $G$  существует единственный простой путь, то  $G$  — связный граф с  $|V| - 1$  ребром.
15. Равносильность свойств ориентированных графов: (1) каждая компонента сильной связности состоит из одной вершины; (2) вершины графа возможно занумеровать так, чтобы каждое ребро вело из вершины с меньшим номером в вершину с большим номером; (3) в графе нет циклов длины больше 1.
16. Критерий существования эйлера цикла в неориентированном графе.
17. Критерий обратимости остатка (вычета) по модулю  $N$ .
18. Малая теорема Ферма.