

Неделя 1. Алгебра логики

1. Для какого слова **ЛОЖНО** высказывание

«Первая буква слова гласная \rightarrow (Вторая буква слова гласная \vee Последняя буква слова гласная)»?

- 1) Жара 2) Орда 3) Огород 4) Парад

2. Докажите, что **а)** $x \rightarrow y = \bar{x} \vee y$; **б)** $\overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y}$ **в)** $\overline{x \rightarrow y} = x \wedge \bar{y}$.

3. Булева функция задана вектором значений: $f(x_1, x_2, x_3) = 10100101$.

Опишите f через **а)** таблицу истинности;

б) Дизъюнктивную нормальную форму (ДНФ);

в) Конъюнктивную нормальную форму (КНФ).

Какие переменные f являются **г)** существенными; **д)** фиктивными?

4. Записать в виде КНФ функцию от n переменных, принимающую значение «0» только на наборах из всех нулей и всех единиц.

5. Постройте ДНФ для булевой функции, заданной формулой:

а) $x_1 \oplus x_2 \oplus (x_1 \wedge x_2)$; **б)** $(x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_4) \wedge \dots \wedge (x_1 \vee x_9)$;

в) * $\bigwedge_{1 \leq i < j < k \leq 5} (x_i \vee x_j \vee x_k) \wedge (\bar{x}_i \vee \bar{x}_j \vee \bar{x}_k)$.

6. Докажите, что не существует булевой функции $f(x, y)$, существенно зависящей от обеих переменных, такой что

$$\overline{f(x, y)} = f(\bar{x}, \bar{y}).$$

7. Докажите следующие формулы разложений (Шеннона и Рида):

а) $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\bar{x}_1 \wedge f(0, x_2, \dots, x_n)) \vee (x_1 \wedge f(1, x_2, \dots, x_n))$;

б) $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = ((1 \oplus x_1) \wedge f(0, x_2, \dots, x_n)) \oplus (x_1 \wedge f(1, x_2, \dots, x_n))$.

8. Булева функция $\text{MAJ}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ равна тому значению, которое принимает большинство переменных (если мнения разделились поровну, $\text{MAJ} = 0$). Докажите, что эту функцию можно представить в виде ДНФ, в которую не входят отрицания переменных.

Домашнее задание 1

1. a, b, c – целые числа, для которых истинно высказывание

$$\neg(a = b) \wedge ((b < a) \rightarrow (2c > a)) \wedge ((a < b) \rightarrow (a > 2c))$$

Чему равно a , если $c = 7, b = 16$?

2. Докажите, что

$$1 \oplus x_1 \oplus x_2 = (x_1 \rightarrow x_2) \wedge (x_2 \rightarrow x_1).$$

3. Указать существенные и несущественные (фиктивные) переменные следующих функций:

а) $f(x_1, x_2, x_3) = 00111100$; б) $g(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \rightarrow (x_1 \vee x_2)) \rightarrow x_3$.

4. Постройте для функции f из предыдущей задачи а) ДНФ; б) КНФ.

5. Докажите формулу разложения:

$$f(x_1, \dots, x_n) = (x_1 \vee f(0, x_2, \dots, x_n)) \wedge (\bar{x}_1 \vee f(1, x_2, \dots, x_n)).$$

6. Постройте ДНФ для функции $x_1 \rightarrow (x_3 \wedge \neg x_2 \leftrightarrow x_1)$.

7. Постройте ДНФ для функции $(x_1 \rightarrow x_2) \wedge (x_2 \rightarrow x_3) \wedge \dots \wedge (x_7 \rightarrow x_8)$.

8. Булева функция $\text{PAR}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ равна 1, если количество единиц среди значений x_1, x_2, \dots, x_n нечётно и нулю, если чётно.

а) Выразите функцию $\text{PAR}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ через известные булевы функции (можно использовать связи $\wedge, \vee, \neg, \oplus, \rightarrow$).

б) Можно ли представить $\text{PAR}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в виде ДНФ без отрицаний?