Дискретная математика **Основной поток**

Неделя 3. Множества и комбинаторика

1. В группе студентов есть один, который знает C++, Java, Python, Haskell. Каждые три из этих языков знают два студента. Каждые два — 6 студентов. Каждый из этих языков знают по 15 студентов. Каково наименьшее количество студентов в такой группе?

2. Найдите значение булевой функции при всех значениях переменных:

$$x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus (x_1 \wedge x_2) \oplus (x_2 \wedge x_3) \oplus (x_3 \wedge x_1).$$

Загадка: *причём тут формула включений-исключений?*

3. Докажите, что двоичных последовательностей (слов) длины n, в которых ровно k единиц столько же, сколько и подмножеств размера k множества $\{1, 2, \ldots, n\}$.

4. Пусть A и B — два множества. Покажите равносильность свойств «существует функция $f\colon A \to B$, являющаяся инъекцией» и «существует функция $f\colon B \to A$, являющаяся сюръекцией».

5. Чего больше, разбиений 20-элементного множества на 6 непустых подмножеств или его подмножеств размера 5?

Напоминание: *через* 2^A *обозначают множество всех подмножеств множества* A*. Множество, элементами которого являются множества, будем называть* классом (множеств).

6. Функция f устанавливает соответствие между классом $\mathcal{P} \subseteq 2^{\{1,2,\ldots,n\}}$ и многочленом Жегалкина в стандартном виде P:

$$P = \bigoplus_{S \in \mathcal{P}} \bigwedge_{i \in S} x_i,$$

то есть если $\mathcal{P} = \{\varnothing, \{1\}, \{1,2\}, \{2,3,4\}\}$, то $f(\mathcal{P}) = 1 \oplus x_1 \oplus x_1x_2 \oplus x_2x_3x_4$ (мы полагаем конъюнкцию по пустому множеству равной единице).

Докажите, что **а)** f — биекция; **б)** $f(\mathcal{P} \bigtriangleup \mathcal{Q}) = f(\mathcal{P}) \oplus f(\mathcal{Q})$.

Функция g ставит многочлену Жегалкина P в соответствие булеву функцию f_P, которую тот реализует. Докажите, что **в)** g — инъекция; **г)** g — сюръекция (см. задачу 7 недели 1 на разложение Рида).

д) Докажите, что булевых функций от n переменных столько же, сколько и классов подмножеств n-элементного множества (используя функции f и g).

7. *Разбиением* числа N на k частей называется такая невозрастающая последовательность положительных целых чисел $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_k$, что $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k = N$. Чего больше, разбиений числа N на не более чем k слагаемых, или разбиений числа $N + k$ на ровно k слагаемых?

8. Пусть для конечных множеств A и B существуют инъекция $f\colon A \to B$ и сюръекция $g\colon A \to B$. Докажите, что тогда существует биекция $h\colon A \to B$.

9. Чего больше, разбиений N на слагаемые, не превосходящие k, или разбиений N на не более чем k слагаемых?

10*. Чего больше: инъективных отображений 5-элементного множества в 20-элементное или сюръективных отображений 20-элементного множества в 5-элементное?

Дискретная математика **Основной поток**

Домашнее задание 3

1. Сколько чисел от 1 до 1000 не делятся ни на 3, ни на 5, ни на 7?

2. Сколькими способами можно закрасить клетки таблицы 3×4 так, чтобы незакрашенные клетки содержали или верхний ряд, или нижний ряд, или две средних вертикали?

3. Для полета на Марс набирают группу людей, в которой каждый должен владеть хотя бы одной из профессий повара, медика, пилота или астронома. При этом в техническом задании указано, что каждой профессией из списка должно владеть ровно 6 человек в группе. Кроме того указано, что в группе должен найтись ровно один человек, владеющий всеми этими профессиями; каждой парой профессий должны владеть ровно 4 человека; каждой тройкой — ровно 2.

Выполнимо ли такое техническое задание?

4. Докажите, что для любых конечных непустых множеств A и B справедливо следующее утверждение. Если не существует инъекции из A в B, то существует сюръекция из A в B.

5. Постройте биекцию между конечными подмножествами множества положительных целых чисел и конечными строго возрастающими последовательностями положительных целых чисел.

6. Чего больше, разбиений n-элементного множества на не более чем k подмножеств или разбиений $(n+k)$-элементного множества на ровно k подмножеств?

7. Чего больше, правильных скобочных последовательностей из n пар скобок или последовательностей $(x_1, x_2, \ldots, x_{2n})$ с элементами ± 1, таких что $\sum\limits_{i=1}^{2n} x_i = 0$?