

Неделя 5. Биномиальные коэффициенты

1. Ладья стоит на левом поле клетчатой полоски 1×30 и за ход может сдвинуться на любое количество клеток вправо.

а) Сколькими способами она может добраться до крайнего правого поля?

б) Сколькими способами она может добраться до крайнего правого поля ровно за 7 ходов?

2. Найдите коэффициент при

а) x^3y^7 в разложении $(2x - y)^{10}$;

б) $x_1^3x_2x_4^5x_5$ в разложении $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^{10}$.

3. Докажите, что

$$\text{а) } \sum_{j=0}^k \binom{r}{j} \binom{s}{k-j} = \binom{r+s}{k};$$

$$\text{б) } \sum_{j=0}^n \binom{j}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

(Желательно найти комбинаторное доказательство.)

4. Сколько существует способов решения уравнения $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 11$ в неотрицательных целых числах?

5. Сколькими способами можно разделить 15 одинаковых монет между 7 нумизматами так, чтобы каждому досталось хотя бы по монете?

6. Сколько различных слов (не обязательно осмысленных) можно получить, переставляя буквы в словах

а) «КОМПЬЮТЕР»; б) «ЛИНИЯ»; в) «ПАРАБОЛА»; г) «ОБОРОНОСПОСОБНОСТЬ».

7. Сколькими способами можно выбрать 6 чисел от 1 до 15, чтобы среди них не было двух, отличающихся на единицу?

8. Докажите, что

$$\binom{n+k+1}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \dots + \binom{n+k}{k};$$

9. Разложением числа n называется такая последовательность положительных целых чисел x_1, x_2, \dots, x_k , что $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$. Найдите количество разложений n на нечетные слагаемые.

10. Сколькими способами можно разрезать правильный n -угольник на треугольники, проводя неп пересекающиеся диагонали?

Домашнее задание 5

1. Робот ходит по координатной плоскости. На каждом шаге он может увеличить одну координату на 1 или обе координаты на 2. Сколько есть способов переместить Робота из точки $(0, 0)$ в точку $(4, 5)$?
2. Какое слагаемое в разложении $(1 + 2)^n$ по формуле бинома Ньютона будет наибольшим?
3. Найдите число слов длины n над алфавитом $\{0, 1\}$, в которых нет двух единиц подряд.
4. Дать комбинаторное доказательство тождества $\binom{n}{m} \binom{m}{k} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{m-k}$.
5. Какое из чисел больше $\binom{F_{1000}}{F_{998} + 1}$ или $\binom{F_{1000}}{F_{999} + 1}$? Здесь F_n — n -е число Фибоначчи.
6. Приведите комбинаторное доказательство равенства

$$\sum_{0 \leq k \leq (n+1)/2} \binom{n-k+1}{k} = F_{n+2}.$$

7. Сколько способов разместить 20 различных книг на 5 полках, если каждая полка может вместить все 20 книг? Размещения, отличающиеся порядком книг на полках, считаются различными.
8. Студсовет из 8 человек выбирает из своего состава председателя путем тайного голосования. Каждый может отдать один голос за любого члена студсовета. Результат голосования — число голосов, отданных за каждого кандидата. Сколько существует различных результатов голосования?