Дискретная математика **Основной поток**

Неделя 6. Функции и подсчёты

Напоминание: *функции не обязательно всюду определены, однако обозначение $f : A \to B$ означает, что множество A — область определения функции f.*

1. Функция g из множества положительных целых чисел в множество положительных целых чисел сопоставляет числу x наибольший простой делитель x.

а) Какова область определения g?

б) Верно ли, что если X — конечное, то и $g^{-1}(X)$ конечное?

2. Пусть f — функция из множества A в множество B, $X, Y \subseteq A$, $U, V \subseteq B$. Верны ли для любых множеств f, A, B, X, Y, U, V следующие утверждения

а) $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$;

б) из равенства $f(X) = f(Y)$ следует $X \cap Y \neq \varnothing$;

в) $f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$;

г) из равенства $f^{-1}(U) = f^{-1}(V)$ следует $U = V$.

3. Функция f определена на множестве X и принимает значения в множестве Y, при этом $B \subseteq Y$. Какой знак сравнения можно поставить вместо «?», чтобы утверждение «$f(f^{-1}(B))\,?\,B$» стало верным?

4. Найдите количество **а)** неубывающих инъекций $f\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, m\}$; **б)** неубывающих сюръекций $f\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, m\}$.

Функция неубывающая, если $x \leqslant y$ влечет $f(x) \leqslant f(y)$.

5. Найдите количество функций f из $\{1, \ldots, 7\}$ в $\{1, \ldots, 7\}$, таких что $f(\{1, 2, 3\}) = \{4, 5, 6\}$ и $f^{-1}(\{1, 2, 3\}) = \{4, 5, 6\}$ (на $f(7)$ и $f^{-1}(7)$ дополнительных ограничений нет). Ответом на вопрос задачи должно быть число в десятичной записи.

6. Найдите число разбиений n-элементного множества на k подмножеств. Под разбиением множества $1, \ldots, n$ понимается такое семейство множеств $\{A_1, \ldots A_k\}$, что $A_i \neq \varnothing$, $A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$, и $\bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i = \{1, \ldots, n\}$.

7. Приведите пример сюръекции множества положительных целых чисел на себя, для которой прообраз любого 1-элементного множества бесконечен.

Дискретная математика **Основной поток**

Домашнее задание 6

1. Функция f из множества целых чисел в множество целых чисел сопоставляет числу x наименьшее простое число, которое больше x^2. Докажите, что если множество целых чисел X конечное, то и полный прообраз этого множества $f^{-1}(X)$ конечен.

2. Приведите пример такой инъекции f из множества X в множество Y, что для некоторого $B \subseteq Y$ выполняются оба условия

$$\begin{cases} B \neq \varnothing, \\ f^{-1}(B) = \varnothing. \end{cases}$$

3. Про функцию f из множества X в множество Y и множество $B \subseteq Y$ известно, что $f^{-1}(B) = X$. Верно ли, что $B = Y$?

4. Пусть f — функция из множества X в множество Y, при этом $A \subseteq X$. Какой знак сравнения можно поставить вместо «?», чтобы утверждение

$$f^{-1}(f(A)) \;?\; A$$

стало верным? (Возможные знаки сравнения в этой и двух следующих задачах: $\subseteq$, $\supseteq$, $=$. Нужно учесть все варианты.)

5. Пусть f — функция из множества $A \cup B$ в множество Y. Какой знак сравнения можно поставить вместо «?», чтобы утверждение

$$f(A \setminus B) \;?\; f(A) \setminus f(B)$$

стало верным?

6. Пусть f — функция из множества X в множество Y, при этом $A \cup B \subseteq Y$. Какой знак сравнения можно поставить вместо «?», чтобы утверждение

$$f^{-1}(A \setminus B) \;?\; f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$$

стало верным?

7. Найдите количество неубывающих функций $f\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, m\}$. Функция неубывающая, если $x \leqslant y$ влечет $f(x) \leqslant f(y)$.