**Дискретная математика** **Основной поток**

**Неделя 7. Бинарные отношения. Отношения эквивалентности**

Обозначения: $xPy$ сокращение для $(x, y) \in P$. По аналогии с отношениями типа «больше». $P^{-1}$ — обратное отношение, содержит такие пары $(x, y)$, что $(y, x) \in P$. $\overline{P}$ — дополнительное отношение, содержит пары, не содержащиеся в $P$. $P \circ Q$ — композиция отношений $P$ и $Q$.

**1.** Найдите результат операций над отношениями, определенными на множестве действительных чисел.

**а)** $\overline{(>)}$; **б)** $(>)^{-1}$; **в)** $(\geq)\Delta(\leq)$; **г)** $(>) \cap (<)$; **д)** $(=) \circ (>)$; **е)** $(<) \circ (<)$; **ж)** $(<) \circ (>)$.

**2.** Являются ли следующие отношения рефлексивными, симметричными транзитивными:

**а)** «точки $a$ и $b$ лежат на одной прямой»;

**б)** «прямая $a$ перпендикулярна прямой $b$»;

**в)** «прямая $a$ параллельна прямой $b$» (ответ зависит от того, по какому учебнику вы изучали геометрию);

**г)** «для функций $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ выполнено $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$»?

**3.** Пусть $f : A \to B$ – некоторое отображение. Будут ли следующие отношения отношениями эквивалентности на множестве $A$:

**а)** $x \sim_f y \iff f(x) = f(y)$; **б)** $x \sim_{\bar{f}} y \iff f(x) \neq f(y)$?

В случае положительного ответа на вопрос, опишите классы эквивалентности для соответствующего отношения.

**4.** Найдите $R \circ R$, где $R(x, y)$ — бинарное отношение на множестве $\mathbb{R}$, означающее, что

**а)** $y = x + 1$; **б)** $x + y = 1$.

**5.** Пусть $P \subseteq A \times A$ и $Q \subseteq B \times B$ – отношения эквивалентности. Будет ли отношением эквивалентности отношение $R \subseteq (A \times B) \times (A \times B) : (a, b)R(a', b') \iff aPa', bQb'$?

**Дискретная математика** **Основной поток**

## Домашнее задание 7

**1.** Выразите отношение «племянник» через отношения «отец» и «мать» и операции над отношениями.

**2.** Пусть бинарные отношения $P_1, P_2 \subseteq A \times A$ транзитивны. Будут ли $\overline{P_1}$, $P_1 \cap P_2$, $P_1 \cup P_2$, $P_1 \circ P_2$ обладать теми же свойствами?

**3.** Бинарное отношение на множестве из 6 элементов содержит 33 пары. Может ли оно быть **а)** симметричным; **б)** транзитивным?

**4.** Об отображениях (всюду определенных функциях) $f$, $g$ из множества $A$ в себя известно, что $f \circ g \circ f = \mathrm{id}_A$. Верно ли, что $f$ — биекция? (Множество $A$ не обязательно конечное.)

**5.** Пусть $R$ – отношение эквивалентности на множестве $A$. Докажите, что существуют такие множество $B$ и отображение $f : A \to B$, что каждый класс эквивалентности $C$ представим в виде $C = f^{-1}(b)$ для некоторого элемента $b \in B$.

**6.** Множество $A$ состоит из семи элементов. Найдите количество отображений $f : A \to A$, таких что $f \circ f = \mathrm{id}_A$.