Дискретная математика **Основной поток**

Неделя 8. Графы I. Неориентированные графы

О терминологии. Если не оговорено противное, под словом «граф» далее понимается неориентированный граф без петель и кратных рёбер. Выражение «подграф A графа B» означает, что граф A можно получить из графа B удалением части вершин и рёбер.

Граф–путь P_n имеет n вершин $v_1, \dots v_n$. Рёбрами связаны пары вершин v_i и v_{i+1} $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$. Таким образом, в графе–пути $n-1$ ребро. Говорят, что *длина* пути равна $n-1$.

1. Докажите, что не существует графа с пятью вершинами, степени которых равны 4, 4, 4, 4, 2.

2. В графе 100 вершин и 800 рёбер.

а) Докажите, что в этом графе есть хотя бы одна вершина степени не меньше 16.

б) Может ли так случиться, что все вершины этого графа имеют степень 16?

3. Вершинами графа, который называется *булев куб размерности* n и обозначается B_n, являются двоичные слова длины n, а соседями (вершинами, соединёнными ребром) являются пары слов, отличающихся в одной позиции.

а) Сколько вершин в булевом кубе B_n?

б) Сколько рёбер в булевом кубе B_n?

в) Сколько в булевом кубе B_n подграфов, которые являются графами–путями длины 2 (вершин в таком графе 3)?

г) Верно ли, что в графе B_3 есть путь длины 3000?

д) Верно ли, что в графе B_3 есть простой путь длины 8? длины 7?

Два графа $G = \langle V, E\rangle$ и $G' = \langle V', E'\rangle$ называют *изоморфными*, если существует биекция $f : V \to V'$, такая что $\{u, v\} \in E \iff \{f(u), f(v)\} \in E'$.

4. Граф $S_n = \langle V, E\rangle$ имеет множество вершин $V = 2^{\{1,2,\dots,n\}}$ (вершина $v \in V$ – подмножество множества $\{1, 2, 3, \dots n\}$); вершины v и u соединены ребром тогда и только тогда, когда $|u \triangle v| = 1$.

а) Докажите, что граф S_n изоморфен булеву кубу B_n.

б) Сколько существует различных наборов подмножеств $A_1, A_2, A_3 \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$, для которых выполняется $|A_1 \triangle A_2| = |A_2 \triangle A_3| = 1$?

Дополнением $\bar{G}$ графа G называется такой граф на том же множестве вершин, что и у графа G, в котором пара вершин связана ребром тогда и только тогда, когда в G эта пара вершин ребром не связана.

5. Докажите, что граф или его дополнение связны (возможно оба связны).

6. Какое максимальное число рёбер может быть в несвязном графе с n вершинами?

7. Про граф известно, что в нём 1000 вершин и 2017 рёбер. Верно ли, что в таком графе может не оказаться ни одного простого пути длины 64?

8. Докажите, что отношение «изоморфизм» на множестве графов является отношением эквивалентности.

Дискретная математика **Основной поток**

Домашнее задание 8

О терминологии. Если не оговорено противное, под словом «граф» далее понимается неориентированный граф без петель и кратных рёбер. Выражение «подграф A графа B» означает, что граф A можно получить из графа B удалением части вершин и рёбер.

Граф–путь P_n имеет n вершин $v_1, \ldots v_n$. Рёбрами связаны пары вершин v_i и v_{i+1} $(1 \leqslant n-1)$. Таким образом, в графе–пути $n-1$ ребро. Говорят, что *длина* пути равна $n-1$.

Граф–цикл C_n имеет n вершин $v_1, \ldots v_n$. Рёбрами связаны пары вершин v_i и v_{i+1} $(1 \leqslant n-1)$ и пара вершин v_n и v_1. Таким образом, в графе–цикле n рёбер. Говорят, что длина цикла равна n.

1. Существует ли граф на 8 вершинах, в котором 23 ребра и есть вершина степени 1?

2. Найдите все графы, в которых каждая пара рёбер имеет общий конец.

3. В графе на 400 вершинах степень каждой вершины равна 201. Докажите, что в этом графе есть подграф, который является графом–циклом длины 3.

4. В стране Цифра есть 9 городов с названиями 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Путешественник обнаружил, что два города соединены авиалинией в том и только в том случае, если двузначное число, составленное из цифр-названий этих городов, делится на 3. Можно ли добраться из города 1 в город 9, используя эти авиалинии (возможно, с пересадками)?

5. В стране Семёрка 15 городов, каждый из которых соединён дорогами не менее, чем с 7 другими. Докажите, что из любого города можно добраться до любого другого (возможно, проезжая через другие города).

6. Граф G имеет множество вершин $V = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$. Граф G содержит ребро $\{u, v\}$ (для определённости $u < v$), если выполняются следующие условия:

- v делится на u;
- не существует отличной от v вершины $s \in V$, такой что и v делится на s и s делится на u.

а) Постройте граф G.

б) Изоморфен ли этот граф булеву кубу B_3? При положительном ответе укажите биекцию.

7. Докажите, что для любых подмножеств $A_1, A_2, \ldots, A_6 \subseteq \{0, 1, \ldots 2017\}$ справедливо следующие. Для каких-то трёх подмножеств A_i, A_j, A_k выполняется $A_i \triangle A_j = A_i \triangle A_k = A_j \triangle A_k = \varnothing$ или для каких-то трёх подмножеств A_p, A_q, A_r выполняется $A_p \triangle A_q \neq \varnothing, A_p \triangle A_r \neq \varnothing, A_q \triangle A_r \neq \varnothing$.

8. Пусть G – двудольный граф, с долями L и R, $|L| = |R| = n$, и множеством рёбер E. Степень каждой вершины $v \in L \cup R$ равна 2. Докажите, что существует биекция $f : L \to R$, такая что $f(u) = v$, только если $\{u, v\} \in E$.