Дискретная математика **Основной поток**

Неделя 9. Графы II. Деревья

О терминологии. Если не оговорено противное, под словом «граф» далее понимается неориентированный граф без петель и кратных рёбер. Выражение «подграф A графа B» означает, что граф A можно получить из графа B удалением части вершин и рёбер.

Цикл длины k — это такая последовательность вершин $a_1, a_2, \ldots, a_k, a_1$, в которой любые два соседних члена соединены ребром. *Простой цикл* – это такой цикл, в котором вершины $a_1, a_2, \ldots, a_k$ различны. Дерево – связный граф без простых циклов длины больше 2.

Раскраска вершин графа называется *правильной*, если концы каждого ребра покрашены в разные цвета.

Два графа $G = \langle V, E\rangle$ и $G' = \langle V', E'\rangle$ называют *изоморфными*, если существует биекция $f : V \to V'$, такая что $\{u, v\} \in E \iff \{f(u), f(v)\} \in E'$.

Вершинами графа, который называется *булев куб размерности* n и обозначается B_n, являются двоичные слова длины n, а соседями являются пары слов, отличающихся в одной позиции.

Расстоянием $\rho(u, v)$ между двумя вершинами u и v в связном графе называют длину кратчайшего пути между ними. *Диаметром* графа G называют число $\max\limits_{u,v\in V} \rho(u, v)$, а также простой путь такой длины.

1. Дерево имеет 2017 вершин. Верно ли, что в нём найдется простой путь длины 3?

2. Существует ли дерево на 9 вершинах, в котором 2 вершины имеют степень 5?

3. В дереве нет вершин степени 2. Докажите, что количество висячих вершин (т.е. вершин степени 1) больше половины общего количества вершин.

Остовным деревом называют подграф графа, который является деревом на всех вершинах исходного графа.

4. Докажите, что любой связный граф имеет остовное дерево

5. а) Найдите диаметр булева куба B_n. Для начала можно взять $n = 3$.

б) Постройте остовное дерево для графа B_3.

Корневое дерево – это дерево с выделенной вершиной – *корнем. Листом* называют вершину степени 1, отличную от корня, а *глубиной* дерева – длину самого длинного простого пути от корня до листа.

в) Как связаны диаметр графа и минимальная (по всем остовным деревьям с корнем) глубина остовного дерева графа?

6. а) Докажите, что любое дерево 2-раскрашиваемо (существует правильная раскраска в 2 цвета). **б)** Сколько есть правильных 2-раскрасок у дерева?

7. Докажите, что в дереве на 2n вершинах можно выбрать n вершин так, что ни одна пара выбранных вершин не соединена ребром (такие множества вершин называются *независимыми*).

8. *Кликой* размера n в графе G называют подграф G, изоморфный полному графу K_n.

а) Докажите, что G содержит клику размера n тогда и только тогда, когда его дополнение $\bar{G}$ содержит независимое множество на n вершинах.

б) Докажите, что если G содержит клику размера n, то его вершины нельзя раскрасить правильно в $n - 1$ цветов.

9. Пусть $R \subseteq V \times V$ — антирефлексивное и симметричное отношение. Докажите, что отношение

$$R^* = \{(u, v) \mid \text{ в графе } G = \langle V, R\rangle \text{ есть путь из } u \text{ в } v\}$$

рефлексивное и транзитивное замыкание отношения R, то есть R^* наименьшее рефлексивное и транзитивное отношение, содержащее R.

10. Имеется связный граф. Докажите, что в нём можно выбрать одну из вершин так, чтобы после её удаления вместе со всеми ведущими из неё рёбрами останется связный граф.

Дискретная математика **Основной поток**

Домашнее задание 9

Вершинами *полного бинарного дерева ранга n* являются двоичные слова длины не больше n (включая *пустое слово* длины 0). Два слова соединены ребром в полном бинарном дереве, если одно получается из другого приписыванием одной цифры справа (нуля или единицы).

1. Степень каждой вершины графа равна 2. Верно ли, что этот граф 2-раскрашиваемый?

2. Сколько существует правильных раскрасок графа–пути длины n (вершин в этом графе n + 1) в красный, синий и зелёный цвета?

3. В дереве на 2017 вершинах ровно три вершины имеют степень 1. Сколько вершин имеют степень 3?

4. Есть два дерева на n вершинах, каждое имеет диаметр длины d. Можно ли так добавить ребро между вершинами этих деревьев, чтобы длина диаметра полученного дерева равнялась d?

5. Назовем не 2-раскрашиваемый граф минимальным, если после удаления любого ребра он становится 2-раскрашиваемым. Докажите, что в минимальном не 2-раскрашиваемом графе на 1000 вершинах есть хотя бы одна изолированная вершина (т.е. вершина степени 0).

6. Найдите количество диаметров в полном бинарном дереве ранга n.

7. Докажите, что булев куб B_{2n} имеет подграф, изоморфный полному бинарному дереву ранга n.

8. Есть ли в булевом кубе остовное дерево, в котором все вершины кроме двух имеют степень 2?