

Неделя 10. Ориентированные графы

Два графа $G = \langle V, E \rangle$ и $G' = \langle V', E' \rangle$ называют *изоморфными*, если существует биекция $f : V \rightarrow V'$, такая что $(u, v) \in E \iff (f(u), f(v)) \in E'$.

Вершинами графа, который называется *ориентированный булев куб размерности n* и обозначается OB_n , являются двоичные слова длины n , а ребро (a, b) есть между такими вершинами $a = a_1 a_2 \dots a_n$ и $b = b_1 b_2 \dots b_n$, что они различаются ровно в одной позиции – под номером i и $a_i = 0, b_i = 1$.

Отношением частичного порядка (порядком) называют антисимметричное и транзитивное отношение $P \subseteq A \times A$, которое либо рефлексивно, либо антирефлексивно. В первом случае отношение порядка называют *нестрогим* и обозначают \leq , а во втором – строгим и обозначают $<$. Каждому отношению порядка $<$ (\leq) ставят в соответствие отношение *непосредственного следования* \prec :

$$\prec = \{(x, y) \mid (x < y) \wedge \neg(\exists z : x < z \wedge z < y)\}.$$

Порядок $P \subseteq A \times A$, для которого граф $\langle A, \prec_P \rangle$ изоморфен булеву кубу OB_n называется *покоординатным порядком*. Отношения частичного порядка $\leq_P \subseteq A \times A$ и $\leq_Q \subseteq B \times B$ называются *изоморфными*, если существует такая биекция $f : A \rightarrow B$, что $x \leq_P y \iff f(x) \leq_Q f(y)$

- Вершины ориентированного графа – целые числа от 0 до 9. Ребро идет из вершины x в вершину y если $y - x = 3$ или $x - y = 5$. Найдите количество компонент сильной связности в этом графе.
- Найдите наибольшее целое положительное число, в котором все цифры разные, а любые две подряд идущие цифры образуют двузначное число, делящееся на 7.
- а) 50 команд сыграли турнир по волейболу в один круг. Говорят, что команда A сильнее B , если A выиграла у B или есть команда C , такая, что A выиграла у C , а C выиграла у B . Доказать, что команда, набравшая наибольшее число очков, сильнее любой другой.
б) Является ли отношение «сильнее» отношением порядка на множестве команд?
- Сколько существует различных нестрогих частичных порядков на множестве $V = \{0, 1, 2\}$? Мы считаем порядки P и Q различными, если они не изоморфны друг другу. Постройте графы $\langle V, \prec_P \rangle$ для каждого порядка.
- Верно ли, что если P – отношение частичного порядка, то следующие отношения также будут задавать частичные порядки: а) P^{-1} ; б) \bar{P} ?
- Найдите максимальное количество простых путей с заданными концами в ориентированном ациклическом графе на n вершинах.
- Известно, что в ориентированном графе на ≥ 2 вершинах из любой вершины в любую другую идёт ровно один простой путь. Верно ли, что выходные (они же исходящие) степени вершин в этом графе равны 1?
- Предположим, что последовательность чисел задана соотношением $a_{n+1} = f(a_n)$, где f – некоторая функция (определённая на всех числах).
а) Покажите, что либо все члены последовательности различны, либо она периодична: после некоторого начала (предпериода) числа начинают повторяться (период).
б) Покажите, что второй случай имеет место тогда и только тогда, когда $a_{2n} = a_n$ при некотором n .

Домашнее задание 10

1. Известно, что в неориентированном графе существует путь, проходящий по каждому ребру ровно два раза. Верно ли, что в графе есть эйлеров цикл?
2. Выходная (она же исходящая) степень каждой вершины в ориентированном графе на n вершинах равна $n - 2$. Какое количество компонент сильной связности может быть в этом графе? Укажите все возможные значения.
3. Пусть в ориентированном графе для любой пары вершин u, v есть либо ребро (u, v) , либо ребро (v, u) (ровно одно из двух). Докажите, что в таком графе есть простой путь, включающий в себя все вершины.
4. Профессор Рассеянный построил частичный порядок $<_P$ для утреннего одевания:
 - $очки <_P брюки <_P ремень <_P пиджак,$
 - $очки <_P рубашка <_P галстук <_P пиджак,$
 - $брюки <_P туфли,$
 - $очки <_P носки <_P туфли,$
 - $очки <_P часы.$
- а) Постройте линейный порядок на вещах так, чтобы исходный порядок их одевания не был нарушен.
- б) Сколько всего существует таких линейных порядков?
5. В Вестеросе n городов, каждые два соединены дорогой. Дороги сходятся лишь в городах (нет перекрестков, одна дорога поднята эстакадой над другой). Злой волшебник хочет установить на всех дорогах одностороннее движение так, что если из города можно выехать, то в него нельзя вернуться. Докажите, что
 - а) волшебник может это сделать;
 - б) найдется город, из которого можно добраться до всех, и найдется город, из которого нельзя выехать;
 - в) существует единственный путь, обходящий все города.
 - г) Сколькими способами волшебник может осуществить свое намерение?
6. Бинарное отношение P называется турниром, если оно антирефлексивно, антисимметрично и связно. (Неформально — это результат кругового турнира — каждую альтернативу сравнили с каждой и запомнили результат). Докажите, что либо турнир — строгий линейный порядок, либо существуют такие альтернативы a, b, c , что aPb , bPc и cPa .
7. Сколько есть порядков на n -элементном множестве, в которых ровно одна пара элементов несравнима?
8. Докажите, что отношение \subseteq на множестве $2^{\{1, \dots, n\}}$ всех подмножеств n -элементного множества является отношением частичного порядка и изоморфно нестрогую покоординатному порядку.
9. Докажите, что любой частичный порядок P на конечном множестве A можно продолжить до линейного. То есть можно добавить в P некоторые пары элементов из $A \times A$ так, что любые два элемента $a, b \in A$ окажутся сравнимы: будет выполнено либо aPb либо bPa .