Дискретная математика **Основной поток**

Неделя 11. Делимость и вычеты

1. Известно, что a, b, c, d — положительные целые числа, $ab = cd$ и a делится на c. Докажите, что d делится на b.

2. При делении некоторого целого числа m на 13 и 15 получили одинаковые частные, но первое деление было с остатком 8, а второе без остатка. Найдите число m.

3. Найдите остаток при делении

а) 100^{100} на 99;

б) $\binom{15}{8}$ на 13;

в) $20^2 + 21^2 + 22^2$ на 23;

г) $\binom{32}{3}$ на 33;

д) $8^{8^{8^8}}$ на 13.

4. Сформулируйте и докажите признак делимости **а)** на 9; **б)** на 11. (В десятичной системе счисления.)

5. а) Какой может быть последняя цифра степени тройки в десятичной записи? **б)** Докажите, что предпоследняя цифра степени тройки всегда четна.

6. а) Пусть p — простое число, большее 3. Докажите, что $p^2 - 1$ делится на 24. **б)** Докажите, что при любом целом a число $a^{73} - a$ делится на 2, на 3, на 5, на 7, на 13, на 19, на 37, на 73.

7. Докажите, что $(p-1)!$ дает остаток -1 по модулю p для любого простого числа p.

8. Докажите, что для любого целого положительного $n \geqslant 2$ между n и $n!$ есть простое число.

Дискретная математика **Основной поток**

Домашнее задание 11

1. Найдите две последние цифры числа 99^{1000}.

2. Какие из следующих утверждений о целых числах a, b, c верны: (1) если a делится на c, а b не делится на c, то $a+b$ не делится на c; (2) если a не делится на c и b не делится на c, то $a+b$ не делится на c; (3) если a не делится на c и b не делится на c, то ab не делится на c; (4) если a делится на b и b делится на c, то ab делится на c^2? Докажите верные и приведите контрпримеры к неверным.

Примечание. В этой задаче правильный и обоснованный ответ на каждый из пунктов дает 1 балл в общую оценку за задачу (максимум 4 балла).

3. Пусть x, y — целые числа. Докажите, что число $x + 10y$ делится на 13 тогда и только тогда, когда $y + 4x$ делится на 13.

4. Положительное целое число a чётно, но не делится на 4. Покажите, что количество (положительных) чётных делителей a равно количеству (положительных) нечётных делителей a.

5. Может ли целое положительное число, в десятичной записи которого 100 нулей, 100 единиц и 100 двоек, быть точным квадратом? (Т.е. квадратный корень целый.)

6. Докажите, что числа a^2 и b^2 дают одинаковые остатки при делении на $a - b$, если a и b — положительные целые числа, и $a > b$.

7. Найдите наименьшее целое положительное число N такое, что и сумма цифр десятичной записи числа N, и сумма цифр десятичной записи числа $N + 1$ делятся на 7.

8. Известно, что $a^{10} + b^{10} + c^{10} + d^{10} + e^{10} + f^{10}$ делится на 11. Докажите, что $abcdef$ делится на 11^6. Здесь a, b, c, d, e, f — целые числа.