Неделя 13. Мощности. Счётные множества

1. Докажите, что множество простых чисел счётно.

2. Докажите, что множество конечных подмножеств рациональных чисел счётно.

3. Пусть множество A конечно, а множество B счётно. Докажите, что множество всюду определённых функций $f\colon A \to B$ счётно.

4. Функция называется периодической, если для некоторого числа T и любого x выполняется $f(x+T) = f(x)$. Докажите, что множество периодических функций $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ счётно.

5. Пусть A бесконечно, а B счётно. Верно ли, что множество $A \cup B$ равномощно множеству A?

6. Докажите, что если A конечно и $B \subseteq A$, то

а) B конечно;

б) $|B| \leqslant |A|$;

в) $|B| = |A| \Leftrightarrow B = A$;

г) $|B| < |A| \Leftrightarrow A \setminus B \neq \varnothing$.

7. Напомним, что натуральные числа — это целые неотрицательные числа. Постройте явные биекции между

а) множеством двоичных слов и натуральными числами;

б) парами натуральных чисел и натуральными числами;

в) конечными последовательностями натуральных чисел и натуральными числами.

Пояснение. Слово «явная» не имеет точного формального смысла. Понимать его нужно так, что биекция должна быть задана правилом, которое применимо к любому элементу области определения и для применения этого правила «нам придётся только механически следовать предписаниям, как если бы мы были роботами: от нас не потребуется ни понимания, ни искусства, ни изобретательности» (С. Клини). Такие правила в дальнейшем мы будем называть алгоритмами.

Дискретная математика **Основной поток**

Домашнее задание 13 часть 1

Это задание нужно сдать на второй учебной неделе после каникул вместе со второй частью по теме «мощность множеств».

Напоминаем, что ответы на вопросы должны быть обоснованы. Ссылка на утверждение, доказанное на лекции или приведённое в учебнике, считается обоснованием. Ссылка на утверждение задачи из классного листка обоснованием **не считается** — нужно воспроизвести рассуждение.

1. Верно ли, что если $A \setminus B$ бесконечно, а B счётно, то $A \setminus B$ равномощно A?

2. Верно ли, что если A бесконечно, а B счётно, то $A \triangle B$ равномощно A?

3. Пусть множество A бесконечно. Верно ли, что для некоторого счётного подмножества $B \subseteq A$ существует сюръекция $f\colon A \setminus B \to A$?

4. Докажите, что любое множество непересекающихся интервалов на прямой конечно или счётно.

5. Докажите, что всякое бесконечное множество содержит бесконечное число непересекающихся счётных подмножеств.

6. Пусть $f\colon A \to B$ — такая всюду определённая функция из множества A в счётное множество B, что для любого $y \in B$ полный прообраз $f^{-1}(y)$ конечен или счётен. Докажите, что тогда A конечно или счётно.