Дискретная математика **Основной поток**

Неделя 20. Схемная сложность. Эффективные схемы

Если в условии задачи базис не указан, то нужно использовать схемы в стандартном базисе $\{\neg, \wedge, \vee\}$.

Если в задаче упоминается граф, предполагается, что схема имеет $\binom{n}{2}$ входов, каждый из которых означает, есть или нет в графе соответствующее ребро.

1. Постройте схему полиномиального размера для функции $\mathrm{MAJ}(x_1, \dots, x_n)$. (Напомним, что эта функция равна 1 тогда и только тогда, когда больше половины её аргументов равны 1.)

2. Булева функция сравнения $L(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n)$ равна 1 тогда и только тогда, когда $(\overline{x_1, \dots, x_n})_2 < (\overline{y_1, \dots, y_n})_2$. Постройте схему размера $O(n)$, которая вычисляет $L(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n)$.

3. а) Постройте схему полиномиального размера, которая «сортирует» биты на входе: если на входе $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ какие-то k переменных принимают значение 1, то на выходе $(y_1, \dots, y_n)$ первые k переменных равны 1, а остальные нули. **б)** Постройте описанную схему в базисе $\{\wedge, \vee\}$.

4. Докажите, что всякую функцию $f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ можно вычислить булевой схемой размера $O(2^n)$.

5. Докажите, что для всех достаточно больших n существует монотонная булева функция $f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, которую нельзя вычислить схемой размера меньше n^{100}. (Булева функция f называется монотонной, если из неравенств $x_i \leqslant y_i$ для всех i следует неравенство $f(x_1, \dots, x_n) \leqslant f(y_1, \dots, y_n)$.)

6. Постройте схему полиномиального размера для функции $f\colon \{0,1\}^{\binom{n}{2}} \to \{0,1\}$, равной единице, тогда и только тогда, когда данный на вход граф связен и содержит эйлеров цикл.

7. Пусть $n = k + 2^k$. Указательная функция $f(x_1, \dots, x_k, y_0, \dots, y_{2^k-1})$ равна y_x, где x — число, двоичная запись которого $x_1 \dots x_k$. Постройте схему полиномиального размера для указательной функции.

8. Постройте схемы полиномиального размера для деления n-битовых целых положительных чисел с остатком.

Дискретная математика **Основной поток**

Домашнее задание 19

Напоминаем, что ответы на вопросы должны быть обоснованы.

Если в условии задачи базис не указан, то нужно использовать схемы в стандартном базисе $\{\neg, \wedge, \vee\}$.

1. Постройте схему полиномиального размера, проверяющую, будет ли n-битное двоичное число делиться на 3.

2. Треугольником в графе называется тройка вершин, попарно соединенных между собой. Рассмотрим вход функции $T\colon \{0,1\}^{\binom{n}{2}} \to \{0,1\}$ как неориентированный граф на n вершинах и положим $T(G) = 1$ тогда и только тогда, когда в G нет треугольников. Постройте схему полиномиального размера, которая вычисляет функцию T.

3. Булева функция вхождения подслова $W(u_1, \ldots, u_\ell; x_1, \ldots, x_n)$ равна 1 тогда и только тогда, когда двоичное слово $u_1 u_2 \ldots u_\ell$ входит в двоичное слово $x_1 x_2 \ldots x_n$, то есть для некоторого $0 \leqslant k \leqslant n - \ell$ выполняются равенства $x_{k+i} = u_i$. Постройте схему полиномиального размера, вычисляющую функцию W.

4. Булева функция $f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ называется симметрической, если ее значение не меняется при перестановке переменных. Докажите, что всякую симметрическую булеву функцию можно вычислить булевой схемой полиномиального от n размера.

5. Постройте схему полиномиального размера для функции $f\colon \{0,1\}^{\binom{n}{2}} \to \{0,1\}$, которая равна 1 тогда и только тогда, когда данный на вход граф раскрашиваем в два цвета.

6. Докажите, что в базисе $\{\oplus, \wedge, 1\}$ любая функция от n переменных вычисляется схемой размера не более 2^{n+1}.

7. Постройте схему полиномиального размера в монотонном базисе $\{\wedge, \vee\}$, вычисляющую функцию $\mathrm{MAJ}(x_1, \ldots, x_n)$.