Дискретная математика **Основной поток**

Неделя 21. Разрешающие деревья и нижние оценки

1. Среди n камней есть один радиоактивный. Счётчиком Гейгера мы можем проверить для любой кучки камней, если ли среди них радиоактивный. За какое наименьшее количество проверок можно найти радиоактивный камень?

2. В клетках шахматной доски написали в каком-то порядке числа от 1 до 64, каждое по одному разу. Про любое множество клеток доски мы можем спросить, какие числа на них стоят, и нам выдают полный список. За какое наименьшее количество вопросов можно понять, где какие числа стоят?

3. Имеется n монет, среди которых одна фальшивая, и чашечные весы. Настоящие монеты все имеют одинаковый вес, а фальшивая легче. На каждую чашку весов можно класть произвольное количество монет. Докажите, что фальшивую монету можно найти за $\log_3 n + O(1)$ взвешиваний.

4. Докажите, что в условиях предыдущей задачи для нахождения фальшивой монеты необходимо $\log_3 n$ взвешиваний.

5. а) Найдите среди n монет самую тяжелую и вторую по тяжести монету за $n + \log n + O(1)$ взвешиваний. **б)** Докажите, что нельзя найти самую тяжелую и вторую по тяжести монету из n монет за менее чем $n + \log n + \Omega(1)$ взвешиваний.

6. Пусть $n = k+2^k$. Указательная функция $f(x_1, \ldots, x_k, y_0, \ldots, y_{2^k-1})$ равна y_x, где x — число, двоичная запись которого $x_1 \ldots x_k$. Постройте схему полиномиального размера для указательной функции.

7. Вычисление булевой функции $f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ в модели разрешающих деревьев происходит следующим образом: за один вопрос разрешается спросить значение одной из переменных, в конце нужно объявить значение функции. Сложность вычисления функции — наименьшее количество вопросов в адаптивном (вопрос может зависеть от предыдущих ответов) протоколе, вычисляющем функцию.

а) Найдите сложность вычисления суммы по модулю два $\bigoplus_i x_i$ в модели разрешающих деревьев.

б) Пусть $n = k + 2^k$, а функция $f(x_1, \ldots, x_k, y_0, \ldots, y_{2^k-1})$ равна y_x, где x — число, двоичная запись которого $x_1 \ldots x_k$. Докажите, что сложность вычисления f в модели разрешающих деревьев не превосходит $k + 1$.

в) Докажите, что сложность вычисления функции f из предыдущего пункта не меньше $k + 1$.

г) Докажите, что неадаптивный протокол, вычисляющий функцию f (список вопросов составляется заранее, до получения ответов), содержит не менее n вопросов.

8. Докажите, что для всех достаточно больших n существует монотонная булева функция $f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, которую нельзя вычислить схемой размера меньше n^{100}. (Булева функция f называется монотонной, если из неравенств $x_i \leqslant y_i$ для всех i следует неравенство $f(x_1, \ldots, x_n) \leqslant f(y_1, \ldots, y_n)$.)