**Неделя 22. Комбинаторные игры**

**1.** Перед двумя игроками лежит куча из $S$ камней. За один ход игрок может либо добавить в кучу один или два камня, либо увеличить число камней вдвое. Выигрывает игрок, после хода которого в куче оказалось не менее 42 камней. Определите **а)** кто выигрывает при $S = 15$ и опишите выигрышную стратегию игрока; **б)** при каких значениях $S$ выигрывает второй игрок.ex

**2.** Шоколадка представляет собой прямоугольник $5 \times 8$, разделённый углублениями на 40 квадратиков. Двое по очереди разламывают её на части по углублениям: за один ход можно разломить любой из кусков (больший одного квадратика) на два. Кто не может сделать хода (все куски уже разломаны), проигрывает. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

**3.** На шахматную доску $8 \times 8$ двое по очереди ставят коней на поля, не находящиеся под боем ранее поставленных (все равно кем) коней. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

**4.** В строчку написано несколько минусов. Два игрока по очереди переправляют один или два соседних минуса на плюс; выигрывает переправивший последний минус. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

**5.** Часы показывают полдень. Два игрока по очереди переводят часовую стрелку на два или три часа вперед. Если после хода игрока стрелка указывает на 6, он выиграл. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

**6.** Два игрока играют в крестики-нолики на поле размера $100 \times 100$. Первый игрок в свой ход может поставить крестик в любое свободное поле, а второй – нолик. Игрок выигрывает, если ему первому удается поставить пять своих символов в ряд. Докажите, что у второго игрока нет выигрышной стратегии.

**7.** Двое по очереди обводят цветными карандашами стороны клеток на клетчатой бумаге. Первый игрок обводит красным, второй – синим. За каждый ход можно обвести отрезок между соседними узлами сетки (составляющий сторону клетки), если этот отрезок ещё не обведён другим игроком. Докажите, что второй (синий) игрок может помешать первому образовать красную замкнутую линию.

**8.** Пунктирными линиями нарисован прямоугольник $n \times (n+1)$, разбитый на квадраты $1 \times 1$. Двое ходят по очереди: первый может обвести сплошной линией пунктирную сторону одного из квадратов, а второй может стереть пунктирную сторону. (Стирать сплошные стороны и обводить стёртые нельзя.) Первый игрок хочет соединить сплошными линиями какие-то две точки на противоположных коротких сторонах прямоугольника (а второй – помешать первому). У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

**9.** Отмечены точки в вершинах выпуклого $n$-угольника. Игроки по очереди соединяют точки отрезками так, чтобы у отрезков не было общих точек (даже концов). Тот, кто не может сделать ход, проигрывает. Найдите функцию Шпрага–Гранди для $n \leqslant 10$. Кто выигрывает при $n = 10$?

**10.** Шоколадка представляет собой прямоугольник $m \times n$, поделенный углублением на единичные квадратики. Два игрока играют в следующую игру, делая ходы по очереди. На каждом ходу разрешается забрать один еще не взятый квадратик шоколадки, а также все еще не взятые квадратики, лежащие правее и выше (в пом числе квадратики, лежащие выше в том же столбце и правее в той же строке). Проигрывает тот, кто забирает последний квадратик. Для всех $m$ и $n$ укажите, у кого из игроков есть выигрышная стратегия.

**Дискретная математика** **Основной поток**

**Домашнее задание 20**

**Уведомление.** Это задание не будет проверяться и не будет учитываться в итоговой оценке по курсу. Задание предназначено для подготовки к экзамену, решения задач будут обсуждаться на лекциях и семинарах.

**1.** Найдите максимальное количество рёбер в ациклических ориентированных графах на $n$ вершинах. (Напомним, что по использованному в курсе определению параллельных рёбер в графе нет.)

**2.** Неориентированный путь состоит из вершин $v_0, v_1, \ldots, v_4$. Вершины пути равновероятно и случайно красятся в 4 цвета. Найдите вероятность того, что все вершины, находящиеся на расстоянии 1 или 2, покрашены в разные цвета.

**3.** Найдите НОД$(\underbrace{11\ldots11}_{\text{120 штук}}, \underbrace{11\ldots11}_{\text{84 штуки}})$. (Числа записаны в десятичной системе счисления.)

**4.** В множестве из $n$ элементов выбрано $2^{n-1}+1$ подмножество. Докажите, что среди этих подмножеств есть два непересекающихся.

**5.** Булева функция $U_2(x_1, \ldots, x_n)$ равна 1 тогда и только тогда, когда среди значений $x_1, \ldots, x_n$ есть ровно 2 единицы. Постройте схему размера $O(n)$, вычисляющую функцию $U_2$.

**6.** Пусть $X$ и $Y$ — конечные множества. Даны две всюдуопределенные функции $f, g\colon X \to Y$. Известно, что $f$ является инъекцией, а $g$ — сюръекцией. Верно ли, что для всякого $A \subseteq X$ выполняется $|g^{-1}(f(A))| \geqslant |A|$? Если не верно, приведите пример $f, g$ и $A$, для которых неравенство не верно. Если верно — докажите это.

**7.** При изготовлении ожерелья используют 6 белых и 6 чёрных бусинок. Их надевают на нить в случайном порядке (все расстановки бусин на нити равновероятны), после чего концы нити завязывают и все бусины оказываются расположены по кругу. Найдите математическое ожидание числа чёрных бусин, обе соседние бусины которых белые.

**8.** Множество $\mathbb{R}$ действительных чисел разбито на два множества $A$ и $B$, то есть $A \cup B = \mathbb{R}$, $A \cap B = \varnothing$. Докажите, что хотя бы одно из множеств $A$ или $B$ имеет мощность континуум.