Программа «зимнего» коллоквиума по дискретной математике(основной поток)

В начале коллоквиума Вы получите билет, в котором будет три вопроса: контрольный вопрос на понимание определения, задача на понимание теорем и доказательств, вопрос на знание доказательств (нужно будет доказать теорему из курса). На подготовку ответа у Вас будет около часа. Коллоквиум Вы сдаете устно одному из преподавателей.

Оценка за коллоквиум формируется следующим образом. Вы получаете свой первый балл как только приходите на коллоквиум, еще 2 балла — за полный ответ на контрольный вопрос на понимание определений, 3 балла — за правильное решение задачи, ну и последние 4 балла — за полный ответ на вопрос на знание доказательств.

По правилам НИУ ВШЭ при обнаружении факта списывания за коллоквиум ставится 0 баллов.

1. Список определений

Контрольный вопрос на понимание определений включает в себя формулировку одного определения из списка ниже и контрольный вопрос по этому определению. Пример: «Определение полного прообраза. Пусть $f(x) = x^2$ — функция из $\mathbb{Z}$ в $\mathbb{Z}$. Найдите полный прообраз множества $\{1, 2, 3, 4\}$.»

1. Логические операции: конъюнкция, дизъюнкция и отрицание
2. Логические операции: импликация, XOR (исключающее или) и эквивалентность
3. Булевы функции. Задание таблицей истинности и вектором значений
4. Существенные и фиктивные переменные булевой функции
5. Множество, подмножество, равенство множеств
6. Операции с множествами: объеднинение, пересечение, разность, симметрическая разность. Диаграммы Эйлера-Венна
7. Законы Моргана (с обобщением на произвольное семейство множеств)
8. Закон контрапозиции
9. Метод математической индукции
10. Графы. Основные определения: ребра, вершины, степени вершин.
11. Базовые графы: граф-путь, граф-цикл, полный граф, граф-звезда
12. Подграфы. Путь, цикл, клика и независимое множество.
13. Компонента связности. Индуцированный подграф.
14. Деревья. Полные бинарные деревья (см. ДЗ 7).
15. Правильные раскраски графов. Формулировка критерия 2-раскрашиваемости.
16. Двудольные графы. Двудольные и двураскрашиваемые графы.
17. Эйлеровы циклы.
18. Функции. Область определения и множество значений.
19. Образ множества и полный прообраз.
20. Отображения (всюду определённые функции). Инъекции, сюръекции и биекции.
21. Правило суммы

22. Правило произведения
23. Комбинаторные числа. Число перестановок, число подмножеств размера k у n-элементного множества
24. Характеристическая функция и её использование при подсчёте числа элементов множества.
25. Формула включений и исключений
26. Биномиальные коэффициенты, основные свойства. Бином Ньютона.
27. Треугольник Паскаля. Рекуррентное соотношение.
28. Бинарные отношения. Транзитивность, симметричность, рефлексивность.
29. Теоретико-множественные операции с отношениями. Операция обращения.
30. Композиция бинарных отношений
31. Отношения эквивалентности.
32. Ориентированные графы, основные определения.
33. Компоненты сильной связности ориентированного графа.
34. Отношения (частичного) порядка (строгие и нестрогие), линейные порядки.
35. Отношение непосредственного следования (см. листок недели 11).
36. Изоморфизм графов и (частичных) порядков (см. листок недели 11).

2. Примерные задачи на понимание материала курса

На коллоквиуме Вам может попасться похожая по уровню задача не из этого списка.

1. Докажите, что **а)** $x \to y = \bar{x} \vee y$; **б)** $\overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y}$ **в)** $\overline{x \to y} = x \wedge \bar{y}$.

2. Булева функция задана вектором значений: $f(x_1, x_2, x_3) = 10100101$.

Опишите f через таблицу истинности. Какие переменные f являются **а)** существенными; **б)** фиктивными?

3. Найдите количество последовательностей длины k, которые состоят из различных элементов n-элементного множества.

4. Под числом A в треугольнике Паскаля стоит число B. Может ли так случиться, что $10A < B$? (Напомним, что соседние строки в треугольнике Паскаля сдвинуты так, что число в нижней строке стоит между числами в верхней строке. Поэтому строка, в которой стоит B, находится через одну от строки, в которой стоит A.)

5. Сколько есть путей по целым точкам прямой, которые начинаются в 0; заканчиваются в n; каждый шаг направлен вправо и имеет целую положительную длину?

6. Сколько есть путей, состоящих из k шагов, которые идут по целым точкам прямой, которые начинаются в 0; заканчиваются в n; каждый шаг направлен вправо и имеет целую положительную длину?

7. Выразите характеристическую функцию $\chi_{A \triangle B}(x)$ через $\chi_A(x), \chi_B(x)$ и **а)** операции $\wedge, \vee, \neg$;
б) арифметические операции $+, -, \times$.

8. Докажите, что если какое-то равенство, содержащее переменные для множеств и операции $\cap$, $\cup$, $\setminus$, неверно, то можно найти контрпример к нему, в котором множества пусты или состоят из одного элемента.

9. Функция $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ отображает число n в наибольший простой делитель числа n. Найдите полный прообраз $f^{-1}(E)$, где E — множество четных чисел.

10. Пусть f — функция из множества A в множество B, $X, Y \subseteq A$, $U, V \subseteq B$. Верны ли для любых множеств f, A, B, X, Y, U, V следующие утверждения

а) $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$;

б) из равенства $f(X) = f(Y)$ следует $X \cap Y \neq \varnothing$;

в) $f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$;

г) из равенства $f^{-1}(U) = f^{-1}(V)$ следует $U = V$.

11. Функция $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ отображает число n в наибольший простой делитель числа n. Функция $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ отображает число n в наименьший простой делитель числа n. Верно ли, что $g(f(g(x))) = f(g(x))$?

12. Пусть P_1 и P_2 — отношения эквивалентности. Докажите, что следующие условия равносильны:

(i) Если классы эквивалентности P_1 и P_2 пересекаются, то один из них содержится в другом.

(ii) $P_1 \cup P_2$ — отношение эквивалентности.

13. Верно ли, что композиция сюръективного и инъективного отображений инъективна?

14. Сколько существует функций из n-элементного множества в k-элементное?

15. Найдите количество **а)** неубывающих инъекций $f\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, m\}$; **б)** неубывающих сюръекций $f\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, m\}$.

Функция неубывающая, если $x \leqslant y$ влечет $f(x) \leqslant f(y)$.

16. Пусть $f : A \to B$ – некоторое отображение. Будут ли следующие отношения отношениями эквивалентности на множестве A:

а) $x \sim_f y \iff f(x) = f(y)$; **б)** $x \sim_{\bar{f}} y \iff f(x) \neq f(y)$?

В случае положительного ответа на вопрос, опишите классы эквивалентности для соответствующего отношения.

17. Есть ли такой неориентированный связный граф на 20 вершинах с 28 ребрами, в котором есть 6 вершин, попарно соединенных ребром?

18. Постройте дерево диаметра 8, в котором степени всех вершин не больше 3, а всего вершин 31. (Диаметр — длина наибольшего простого пути.)

19. Приведите пример дерева на 2019 вершинах, к которому нельзя добавить ребро так, чтобы получился 2-раскрашиваемый граф.

20. В ориентированном графе на 16 вершинах исходящие и входящие степени вершин равны 1. Сколько ребер в этом графе?

21. *Остовным деревом* называют подграф графа, который является деревом на всех вершинах исходного графа. Докажите, что любой связный граф имеет остовное дерево

22. Приведите пример ациклического ориентированного графа, к которому нельзя добавить ребро так, чтобы граф остался ациклическим.

23. Для каких n в булевом кубе размерности n есть эйлеров цикл? Для всякого такого n постройте эйлеров цикл.

24. Сколько существует различных нестрогих частичных порядков на множестве $V = \{0, 1, 2\}$? Мы считаем порядки P и Q различными, если они не изоморфны друг другу. Постройте графы $\langle V, S_P \rangle$ для каждого порядка $P \subseteq V \times V$. Здесь S_P – отношение непосредственного следования.

25. Сколько есть порядков на n-элементном множестве, в которых ровно одна пара элементов несравнима?

3. Вопросы на знание доказательств.

1. Обобщённый закон Моргана

2. Иррациональность числа $\sqrt{2}$. Существуют такие иррациональные числа a и b, что число a^b рационально.

3. Нижняя оценка числа связных компонент в неориентированном графе.

4. Если G — минимально связный граф (удаление любого ребра приводит к несвязности), то G не содержит циклов.

5. Если G — связный ациклический граф, то между любыми двумя вершинами G существует единственный путь.

6. Если между любыми двумя вершинами G существует единственный путь, то G — связный граф с $|V| - 1$ ребром.

7. Критерия 2-раскрашиваемости неориентированного графа.

8. Критерий существования эйлерова цикла в неориентированном графе.

9. Явная формула для числа сочетаний $\binom{n}{k}$: числа k-элементных подмножеств n-элементного множества.

10. Бином Ньютона. Формула для биномиальных коэффициентов.

11. Основные свойства треугольника Паскаля: симметричность строк, возрастание чисел в первой половине строки.

12. Основные свойства треугольника Паскаля: формула для суммы чисел в строке, нижняя оценка на центральный коэффициент:
$$\binom{2n}{n} \geqslant \frac{2^{2n}}{2n+1}$$

13. Число решений уравнения $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ в неотрицательных целых числах. (Задача Муавра.)

14. Формула включений и исключений

15. Число отображений, функций, инъекций, биекций из m-элементного множества в n-элементное множество

16. Формула для числа сюръекций

17. Основная теорема об отношениях эквивалентности (классы эквивалентности на множестве A — в точности разбиения множества A на подмножества)

18. Равносильность свойств ориентированных графов: (1) каждая компонента сильной связности состоит из одной вершины; (2) вершины графа возможно занумеровать так, чтобы каждое ребро вело из вершины с меньшим номером в вершину с большим номером; (3) в графе нет циклов длины больше 1.