

**Программа «весеннего» коллоквиума  
по дискретной математике  
(основной поток)**

*В начале коллоквиума Вы получите билет, в котором будет три вопроса: контрольный вопрос на понимание определения, задача на понимание теорем и доказательств, вопрос на знание доказательств (нужно будет доказать теорему из курса). На подготовку ответа у Вас будет около часа. Коллоквиум Вы сдаете устно одному из преподавателей.*

*Оценка за коллоквиум формируется следующим образом. Вы получаете свой первый балл как только приходите на коллоквиум, еще 2 балла — за полный ответ на контрольный вопрос на понимание определений, 3 балла — за правильное решение задачи, ну и последние 4 балла — за полный ответ на вопрос на знание доказательств.*

*По правилам НИУ ВШЭ при обнаружении факта списывания за коллоквиум ставится 0 баллов.*

## 1. Список определений

Контрольный вопрос на понимание определений включает в себя формулировку одного определения из списка ниже и контрольный вопрос по этому определению. Пример: «Определение полного прообраза. Пусть  $f(x) = x^2$  — функция из  $\mathbb{Z}$  в  $\mathbb{Z}$ . Найдите полный прообраз множества  $\{1, 2, 3, 4\}$ .»

1. Деление целых чисел с остатком.
2. Сравнения по модулю. Основные свойства.
3. Арифметика остатков (вычетов). Обратимые остатки (вычеты).
4. Малая теорема Ферма.
5. Функция Эйлера. Теорема Эйлера.
6. Наибольший общий делитель. Алгоритм Евклида.
7. Расширенный алгоритм Евклида нахождения решения линейного диофантова уравнения.
8. Простые числа, формулировка основной теоремы арифметики.
9. Равномощные множества.
10. Счётные множества.
11. Множества мощности континуум.
12. Основные определения элементарной теории вероятностей: исходы, события, вероятность события.
13. Формулировка формулы включений и исключений для вероятностей.
14. Условная вероятность.
15. Независимые события. Основные свойства независимых событий.
16. Формула полной вероятности.
17. Случайная величина и математическое ожидание. Линейность математического ожидания.
18. Формулировка неравенства Маркова.
19. Определение схемы в некотором функциональном базисе. Представление схем графами.
20. Полный базис. Примеры полных и неполных базисов.
21. Полином Жегалкина (в стандартном виде).
22. Схемная сложность функции (размер схемы).

## 2. Примерные задачи на понимание материала курса

На коллоквиуме Вам может попасться похожая по уровню задача не из этого списка.

1. Приведите пример таких целых чисел  $a, b, c$ , что  $\text{НОД}(ab, c) \neq \text{НОД}(a, c) \cdot \text{НОД}(b, c)$ .
2. На сколько нулей заканчивается число  $16!$  ?
3. Найдите остаток от деления  $2^{38}$  на 37.
4. Решите диофантово уравнение  $12x + 19y = 7$ .
5. Сколько есть положительных целых делителей у числа  $66^{66}$ ?
6. Вероятностное пространство: последовательности  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  длины 4, состоящие из целых чисел в диапазоне от 1 до 6. Все исходы равновозможны. Найдите вероятность события « $x_1x_2x_3x_4$  чётно».
7. Приведите пример вероятностного пространства и таких событий  $A, B$  в этом пространстве, что  $\text{Pr}[A | B] = \frac{1}{3} \text{Pr}[A]$ .
8. Существуют ли такие события  $A$  и  $B$ , что  $\text{Pr}[A] = \text{Pr}[B] = \text{Pr}[A | B] = 1/2$ , а  $\text{Pr}[B | A] = 1/3$ ?
9. О событиях  $A$  и  $B$  вероятностного пространства  $U$  известно, что  $\text{Pr}[A] = \text{Pr}[B] = 4/5$ . Могут ли при этом события  $A \cup B$  и  $B$  быть независимыми?
10. Про неотрицательную случайную величину  $X$  известно, что  $\text{Pr}[X > 10] < 1/4$ . Найдите возможные значения математического ожидания  $E[X]$ .
11. Вероятностное пространство: последовательности  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  длины 4, состоящие из целых чисел в диапазоне от 1 до 6. Все исходы равновозможны. Найдите математическое ожидание случайной величины  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ .
12. По 15 мальчиков и девочек стоят в шеренге в случайном порядке. Сколько в среднем девочек стоит левее всех мальчиков?
13. Докажите, что множество непересекающихся отрезков на прямой конечно или счетно.
14. Докажите, что всякое бесконечное множество содержит бесконечное число непересекающихся счетных подмножеств.
15. Докажите, что биекций на множестве натуральных чисел континуум.
16. Постройте ДНФ и КНФ разложения для булевой функции, заданной вектором значений 10100110.
17. Является ли полным базис, состоящий из функций  $x_1 \oplus x_2 \oplus x_3, x_1x_2, 1$ .
18. Найдите полином Жегалкина для функции  $\text{MAJ}_4(x, y, z, t)$ .
19. Рассматриваем схемы в стандартном базисе. Пусть схемная сложность функции  $f$  не больше  $A$ , а схемная сложность функции  $g$  не больше  $B$ . Докажите, что схемная сложность функции  $f \oplus g$  не больше  $A + B + 5$ .
20. Постройте схему полиномиального размера, вычисляющую функцию  $\text{MAJ}_n$ .

### 3. Вопрос на знание доказательств

1. Сравнение  $ax \equiv 1 \pmod{N}$  имеет решение тогда и только тогда, когда  $\text{НОД}(a, N) = 1$ .
2. Малая теорема Ферма.
3. Теорема Эйлера.
4. Корректность алгоритма Евклида и расширенного алгоритма Евклида.
5. Основная теорема арифметики.
6. Китайская теорема об остатках.
7. Мультипликативность функции Эйлера. Формула для функции Эйлера.
8. Формула Байеса. Формула полной вероятности.
9. Парадокс дней рождений (математическое ожидание числа людей с совпавшими днями рождений)
10. Неравенство Маркова.
11. Нижняя оценка на максимальное количество ребер в разрезе.
12. Любое бесконечное множество содержит счётное подмножество. Любое подмножество счётного множества конечно или счётно.
13. Конечное или счётное объединение конечных или счётных множеств конечно или счётно
14. Счётность декартова произведения счётных множеств. Счётность множества рациональных чисел.
15. Равномощность отрезков, интервалов, лучей и прямых (явные биекции).
16. Несчётность множества бесконечных двоичных последовательностей.
17. Теорема Кантора—Бернштейна.
18. Нижняя оценка на число монотонных булевых функций: монотонных булевых функций от  $2n$  переменных не меньше  $2^{\frac{2^n}{2n+1}}$
19. Существование и единственность полинома Жегалкина (в стандартном виде) для любой булевой функции.
20. Разложение в ДНФ и КНФ булевой функции
21. Верхняя оценка  $O(n2^n)$  схемной сложности булевой функции от  $n$  переменных.
22. Булевы схемы для сложения и умножения  $n$ -битовых чисел. Оценка размера.
23. Булева схема для задачи о связности графа. Оценка размера.

24. Задача об угадывании числа. Верхняя и нижняя оценки.
25. Задача о сортировке нижняя оценка.
26. Задача о нахождении самой тяжелой монеты. Верхние и нижние оценки.