

Неделя 1. Алгебра логики: введение

1. Для какого слова ложно высказывание

«Первая буква слова гласная \rightarrow (Вторая буква слова гласная \vee Последняя буква слова гласная)»?

1) жара; 2) орда; 3) огород; 4) парад.

2. Докажите, что **а)** $x \rightarrow y = \bar{x} \vee y$; **б)** $x \wedge y = \overline{\bar{x} \vee \bar{y}}$ **в)** $\overline{x \rightarrow y} = x \wedge \bar{y}$.

3. Найдите для формулы $(x \wedge z) \vee (x \wedge \neg z) \vee \neg(\neg x \rightarrow \neg y)$ равносильную формулу (среди формул ниже), преобразовав первую.

а) 1; б) $x \wedge (z \vee y)$; в) $x \vee y$; г) y .

4. Докажите дистрибутивность дизъюнкции относительно эквивалентности:

$$x \vee (y \leftrightarrow z) = (x \vee y) \leftrightarrow (x \vee z).$$

5. Булева функция $\text{MAJ}(x_1, x_2, x_3)$ возвращает 1 тогда и только тогда, когда хотя бы две переменные из трёх равны 1. Выразите $\text{MAJ}(x_1, x_2, x_3)$ через булеву формулу.

6°. Докажите следующие формулы разложений (Шеннона и Рида):

а) $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\bar{x}_1 \wedge f(0, x_2, \dots, x_n)) \vee (x_1 \wedge f(1, x_2, \dots, x_n))$;

б) $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = ((1 \oplus x_1) \wedge f(0, x_2, \dots, x_n)) \oplus (x_1 \wedge f(1, x_2, \dots, x_n))$.

7. Булева функция задана вектором значений: $f(x_1, x_2, x_3) = 10100101$.

1. Опишите f через таблицу истинности.

2. Какие переменные f являются **а)** существенными; **б)** фиктивными?

3. Опишите f через булеву формулу.

8. Булева функция f задана формулой. Выразите f через таблицу истинности и формулу с операциями \wedge, \vee, \neg (в стандартном базисе):

а) $f(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2 \oplus (x_1 \wedge x_2)$;

б) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus (x_1 \wedge x_2) \oplus (x_1 \wedge x_3) \oplus (x_2 \wedge x_3) \oplus (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3)$.

9. Докажите, что не существует булевой функции $f(x, y)$, существенно зависящей от обеих переменных, такой что

$$\overline{f(x, y)} = f(\bar{x}, \bar{y}).$$

10*. Докажите, что любое тождество вида $A = B$, где A и B — булевы формулы со связками \wedge, \vee, \neg , останется верным, если в нём все конъюнкции заменить на дизъюнкции, а дизъюнкции заменить на конъюнкции.

11*. Постройте такую логическую связку (булеву функцию от двух переменных), что любая булева функция выразима в виде формулы с этой связкой.

Домашнее задание 1.

Во всех домашних работах требуются обоснованные решения!

1. x, y, z – целые числа, для которых истинно высказывание

$$\neg(x = y) \wedge ((y < x) \rightarrow (2z > x)) \wedge ((x < y) \rightarrow (x > 2z))$$

Чему равно x , если $z = 7, y = 16$?

2. Постройте таблицу истинности для функции $\neg((x \wedge \neg y) \wedge z)$.

3. Докажите, что

$$1 \oplus x_1 \oplus x_2 = (x_1 \rightarrow x_2) \wedge (x_2 \rightarrow x_1).$$

4. Выполняется ли дистрибутивность для следующих операций:

а) $x \wedge (y \rightarrow z) \stackrel{?}{=} (x \wedge y) \rightarrow (x \wedge z)$; б) $x \oplus (y \leftrightarrow z) \stackrel{?}{=} (x \oplus y) \leftrightarrow (x \oplus z)$.

5. Выполняется ли для импликации а) коммутативность;

б) ассоциативность, т.е. $(x \rightarrow y) \rightarrow z \stackrel{?}{=} x \rightarrow (y \rightarrow z)$?

6. Указать существенные и несущественные (фиктивные) переменные следующих функций:

а) $f(x_1, x_2, x_3) = 00111100$; б) $g(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \rightarrow (x_1 \vee x_2)) \rightarrow x_3$.

7. Докажите формулу разложения:

$$f(x_1, \dots, x_n) = (x_1 \vee f(0, x_2, \dots, x_n)) \wedge (\neg x_1 \vee f(1, x_2, \dots, x_n)).$$

8. Обозначим через $x^1 = x$ и $x^0 = \neg x$. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ – набор из нулей и единиц. Докажите, что функция $x_1^{\alpha_1} \wedge x_2^{\alpha_2} \wedge \dots \wedge x_n^{\alpha_n}$ истинна ровно на одном входном наборе: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

9. Докажите формулу $\bigvee_{i,j} (x_i \oplus x_j) = (x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \dots \vee \bar{x}_n)$ (дизъюнкция в левой части берётся по всем i и j : $(x_1 \oplus x_2) \vee (x_2 \oplus x_3) \vee \dots$).

10*. Докажите, что существует булева функция, которую нельзя выразить формулой со связками \wedge и \vee .