Дискретная математика **Основной поток**

Неделя 2. Множества и логика

1. Юнивёрсум — натуральные числа ($U = \mathbb{N}$). Опишите неформально на русском языке множества, заданные формулами:

а) $\{1, 3, 5, 7, \ldots\}$; **б)** $\{n \mid n = 2m$ для некоторого $m \in \mathbb{N}\}$;

в) $\{n \mid (\exists m : n = 2m) \wedge (\exists k : n = 3k)\}$.

2. Множество A задано формулой ($U = \mathbb{N}$): $A = \{n \mid \exists k \in \mathbb{N} : n = k^2\}$. Верно ли, что $A = \{1,\ 4,\ 9\}$?

3. Опишите формально множества ($U = \mathbb{Z}$):

а) Множество, состоящее из чисел $1, 10$ и 100.

б) Множество, состоящее из чисел, больших 5.

в) Множество, состоящее из натуральных чисел, меньших 5.

г) Множество, которое не содержит элементов.

4. Докажите, что для любых множеств A, B, C выполняются равенства

а) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$; **б)** $B \cup (A \setminus B) = A \cup B$;

в) $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$; **г)** $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

Комментарий: *Используйте при решении как диаграммы Эйлера-Венна, так и переход к формулам алгебры логики.*

5. На числовой прямой даны два отрезка: $P = [2, 10]$ и $Q = [6, 14]$. Выберите такой отрезок A, что формула

$$((x \in A) \to (x \in P)) \vee (x \in Q)$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x.

1) $[0, 3]$ 2) $[3, 11]$ 3) $[11, 15]$ 4) $[15, 17]$

6. Про множества A, B, C известно, что $A \cap B \subseteq C \setminus (A \cup B)$. Верно ли, что тогда $A \subseteq A \triangle B$?

7. Докажите включение

$$(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \triangle (B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n) \subseteq (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2) \cup \cdots \cup (A_n \triangle B_n)$$

для любых множеств A_i, B_i.

8. Докажите равенство

$$(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_n) \setminus (B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n) = (A_1 \setminus B_1) \cap (A_2 \setminus B_2) \cap \cdots \cap (A_n \setminus B_n)$$

для любых множеств A_i, B_i.

Дискретная математика **Основной поток**

Домашнее задание 2.

1. Верно ли, что для любых множеств A и B выполняется равенство

$$(A \setminus B) \cap ((A \cup B) \setminus (A \cap B)) = A \setminus B?$$

2. Верно ли, что для любых множеств A, B и C выполняется равенство

$$((A \setminus B) \cup (A \setminus C)) \cap (A \setminus (B \cap C)) = A \setminus (B \cup C)?$$

3. Верно ли, что для любых множеств A, B и C выполняется равенство

$$(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)?$$

4. Верно ли, что для любых множеств A и B выполняется включение $(A \cup B) \setminus (A \setminus B) \subseteq B$?

5. Пусть $P = [10, 40]; Q = [20, 30]$; известно, что отрезок A удовлетворяет соотношению

$$((x \in A) \to (x \in P)) \wedge ((x \in Q) \to (x \in A)).$$

1. Найдите отрезок A максимально возможной длины.

2. Найдите отрезок A минимально возможной длины.

6. Про множества A, B, X, Y известно, что $A \cap X = B \cap X$, $A \cup Y = B \cup Y$. Верно ли, что тогда выполняется равенство $A \cup (Y \setminus X) = B \cup (Y \setminus X)$?

7. Пусть $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots \supseteq A_n \supseteq \dots$ — невозрастающая последовательность множеств. Известно, что $A_1 \setminus A_4 = A_6 \setminus A_9$. Докажите, что $A_2 \setminus A_7 = A_3 \setminus A_8$.

8. Пусть A, B, C, D — такие отрезки прямой, что $A \triangle B = C \triangle D$ (симметрические разности равны). Верно ли, что выполняется включение $A \cap B \subseteq C$?