Неделя 3. Математические определения, утверждения и доказательства

1. Известно, что истинны утверждения $A \vee (B \wedge \neg C)$ и $\neg A \wedge (B \vee C)$. Какие из утверждений A, B, C истинны, а какие ложны? При решении используйте логический вывод.

2. Докажите, используя контрапозицию, что если ab не делится на n, то a не делится на n и b не делится на n. Здесь $a, b, n \in \mathbb{Z}$.

3. Докажите, что если $a \times b = c$, то хотя бы одно из чисел a, b не превосходит $\sqrt{c}$; здесь a, b, c — положительные вещественные числа.

4. Верно ли утверждение:

а) Существуют различные положительные целые числа m и n, такие что $m < n$ и n^2 кратно m, но n не кратно m;

б) Произведение рационального и иррационального числа — иррациональное число?

5. Докажите, что число $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ иррационально.
Указание: $(\sqrt{3} + \sqrt{2}) \times (\sqrt{3} - \sqrt{2})$.

6. Докажите, что для любого целого положительного n выполняется

$$1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + n \cdot 2^n = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2.$$

7. Докажите, что 1 можно представить в виде суммы 2019 различных обыкновенных дробей с числителем 1 и положительным знаменателем.

8. На доске написаны сто цифр — нули и единицы (в любой комбинации). Разрешается выполнять два действия:

1. заменять первую цифру (нуль на единицу и наоборот);
2. заменять цифру, стоящую после первой единицы.

Докажите, что после нескольких таких замен можно получить любую комбинацию из 100 нулей и единиц.

9. Какое из утверждений сильнее:

$$\forall x\ \exists y : P(x, y) \qquad \text{или} \qquad \exists y\ \forall x : P(x, y)?$$

10. Из целых чисел от 1 до $2n$ выбрано $n+1$ число. Докажите, что среди выбранных чисел найдутся два, одно из которых делится на другое.

11. На краю пустыни имеется большой запас бензина и машина, которая при полной заправке может проехать 50 километров. Имеются (в неограниченном количестве) канистры, в которые можно сливать бензин из бензобака машины и оставлять на хранение (в любой точке пустыни). Доказать, что машина может проехать любое расстояние. (Канистры с бензином возить не разрешается, пустые можно возить в любом количестве.)

12*. Лабиринтом называется клетчатый квадрат 10×10, некоторые пары соседних узлов в котором соединены отрезком — «стеной» — таким образом, что переходя из клетки в соседнюю по стороне клетку и не проходя через стены, можно посетить все клетки квадрата. Границу квадрата будем также считать обнесенной стеной. В некоторой клетке некоторого лабиринта стоит робот. Он понимает 4 команды — Л, П, В, Н, по которым соответственно идет влево, вправо, вверх и вниз, а если перед ним «стена», то стоит на месте. Как написать программу для робота, выполняя которую он обойдет все клетки независимо от лабиринта и от своего начального положения?

Домашнее задание 3.

Обратите внимание: *задание на двух страницах!*

1. Убедитесь в истинности утверждения (при произвольных A и B):

$$(A \to B) \vee (B \to A). \tag{1}$$

Зафиксируем произвольную параболу. Пусть A — утверждение «ветви параболы направлены вверх», а $B =$«парабола пересекает 0 (прямую $y = 0$)». Проследите за следующими рассуждениями. Утверждение «если ветви параболы направлены вверх, то парабола пересекает 0», очевидно, ложно; тогда истинным должно быть утверждение «если парабола пересекает 0, то ветви параболы направлены вверх», но оно также ложно. То есть оба утверждения в дизъюнкции (1) ложны (при некотором выборе утверждений A и B), но сама дизъюнкция истинна! Найдите ошибку в рассуждениях.

2. В доме живут A, его жена B и их дети C, D, E, при этом справедливы следующие утверждения:

1) если A смотрит телевизор, то и B смотрит телевизор;
2) хотя бы один из D и E смотрит телевизор;
3) ровно один из B и C смотрит телевизор;
4) C и D либо оба смотрят, либо оба не смотрят телевизор;
5) если E смотрит телевизор, то A и D тоже смотрят телевизор.

Кто смотрит и кто не смотрит телевизор?

3. Докажите, используя контрапозицию, что если $x^2 - 6x + 5$ чётно, то x нечётно; здесь $x \in \mathbb{Z}$.

4. Докажите, что произведение положительного рационального числа и иррационального числа — иррациональное число.

5. Про непустые попарно несовпадающие множества A, B и C известно, что $C \setminus A \subseteq B$ и $C \setminus B \subseteq A$. Возможно ли, что $B = A \cap C$?

6. Докажите равенства **а)** $1 \cdot (n-1) + 2 \cdot (n-2) + \cdots + (n-1) \cdot 1 = \dfrac{(n-1)n(n+1)}{6}$;

б) $\cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx = \dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}} - \dfrac{1}{2}$.

7. В зачете участвовало несколько студентов и преподавателей. Известно, что в комнату, где происходил зачет, каждый участник зачета вошел лишь однажды и что каждый преподаватель поговорил с каждым студентом. Докажите, что в какой-то момент зачета в комнате присутствовали либо все студенты (и, может быть, кто-то из преподавателей), либо все преподаватели (и, может быть, кто-то из студентов).

8. Найдите ошибку в доказательстве по индукции утверждения «все лошади одного цвета», точнее $A(n) =$«любые n лошадей одного цвета». База, $A(1)$, очевидна: одна лошадь одного цвета. Шаг, $A(n) \to A(n+1)$: уберём одну лошадь из $n+1$ и воспользуемся предложением $A(n)$ — получим, что оставшиеся n лошадей одного цвета. Вернём теперь убранную лошадь, уберём другую лошадь и опять воспользуемся предложением $A(n)$ — опять получим, что выбранные n лошадей одного цвета, а значит и убранная в начале лошадь того же цвета, что и все остальные. Итак, мы доказали, что любая $n+1$ лошадь одного цвета.

9. В прямоугольнике $3 \times n$ стоят фишки трех цветов, по n штук каждого цвета. Докажите, что можно переставить фишки в каждой строке так, чтобы в каждом столбце были фишки всех цветов.

10*. Докажите, что каждое число $\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \ldots + \sqrt{a_n}$, где $a_i \in \mathbb{N}$ не квадраты целых чисел, иррационально.