## Неделя 4. Графы I. Неориентированные графы

**О терминологии.** Если не оговорено противное, под словом «граф» далее понимается неориентированный граф без петель и кратных рёбер. Выражение «подграф $A$ графа $B$» ($A \subseteq B$) означает, что граф $A$ можно получить из графа $B$ удалением части вершин и рёбер.

*Граф–путь* $P_n$ имеет $n+1$ вершину $v_0$, $v_1$, $\ldots v_n$. Рёбрами связаны пары вершин $v_i$ и $v_{i+1}$ ($0 \leqslant n-1$). Таким образом, в графе–пути $n$ рёбер. Говорят, что *длина* пути равна $n$. *Граф-цикл* $C_n$ имеет $n$ вершин $v_1, \ldots, v_n$, $E = \{\{v_i, v_{i+1}\} \mid 1 \leqslant i < n\} \cup \{v_n, v_1\}$. *Полный граф* $K_n(V, E)$ имеет $n$ вершин, каждая пара которых соединена ребром: $E = \binom{V}{2}$.

**1.** Найдите число рёбер в полном графе $K_n$.

**2.** Докажите, что не существует графа с пятью вершинами, степени которых равны 4, 4, 4, 4, 2.

**3.** В графе 100 вершин и 800 рёбер.

1. Докажите, что в этом графе есть хотя бы одна вершина степени не меньше 16.

2. Может ли так случиться, что все вершины этого графа имеют степень 16?

*Дополнением* $\overline{G}$ графа $G$ называется такой граф на том же множестве вершин, что и у графа $G$, в котором пара вершин связана ребром тогда и только тогда, когда в $G$ эта пара вершин ребром не связана.

**4.** Докажите, что граф содержит клику на $n$ вершинах тогда и только тогда, когда его дополнение содержит независимое множество на $n$ вершинах.

**5.** Докажите, что если $H_1$ и $H_2$ — связные подграфы графа $G$, такие что $H_1 \cap H_2 \neq \varnothing$, то подграф $H_1 \cup H_2$ связен.

**6.** Докажите, что граф или его дополнение связны (возможно оба связны).

**7.** Какое максимальное число рёбер может быть в несвязном графе с $n$ вершинами?

**8.** Каждая вершина графа $G$ имеет степень 2. Докажите, что $G = H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_m$, где $H_i$ — граф цикл, и $H_i \cap H_j = \varnothing$.

Подграф $G[U] = \left(U, \binom{U}{2} \cap E(G)\right)$ графа $G$ называют *индуцированным* (множеством $U \subseteq V$).

**9.** Докажите, что вершины связного графа $G$ можно упорядочить так, что для каждого $i$, $1 \leqslant i \leqslant |V(G)|$, индуцированный подграф $G[\{v_1, \ldots, v_i\}]$ будет связным.

**10.** Про граф известно, что в нём 1000 вершин и 2019 рёбер. Верно ли, что в таком графе может не оказаться ни одного пути длины 64?

**Дискретная математика** **Основной поток**

**Домашнее задание 4.**

**1.** Существует ли граф на 8 вершинах, в котором 23 ребра и есть вершина степени 1?

**2.** В стране Цифра есть 9 городов с названиями 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Путешественник обнаружил, что два города соединены авиалинией в том и только в том случае, если двузначное число, составленное из цифр-названий этих городов, делится на 3. Можно ли добраться из города 1 в город 9, используя эти авиалинии (возможно, с пересадками)?

**3.** Найдите все графы, в которых каждая пара рёбер имеет общий конец.

**4.** В графе на 400 вершинах степень каждой вершины равна 201. Докажите, что в этом графе есть цикл длины 3.

**5.** Верно ли, что если $H_1$ и $H_2$ — связные подграфы графа $G$, такие что $H_1 \cap H_2 \neq \varnothing$, то подграф $H_1 \cap H_2$ связен?

**6.** В стране Семёрка 15 городов, каждый из которых соединён дорогами не менее, чем с 7 другими. Докажите, что из любого города можно добраться до любого другого (возможно, проезжая через другие города).

**7.** Сформулируйте следующее утверждение на языке теории графов и докажите его. На каждой лекции есть два студента, которые знакомы с одинаковом числом студентов (знакомство считается взаимным).

**8.** Найдите все графы-пути и графы-циклы, дополнение которых граф-путь или граф-цикл.