Неделя 5. Графы II. Деревья и раскраски

О терминологии. Раскраска вершин графа называется *правильной*, если концы каждого ребра покрашены в разные цвета.
Расстоянием $\rho(u, v)$ между двумя вершинами u и v в связном графе называют длину кратчайшего пути между ними. *Диаметром* графа G называют число $\operatorname{diam}(G) = \max\limits_{u,v\in V} \rho(u, v)$, а также путь такой длины. Вершина v называется *центром* графа, если максимальное расстояние от неё до любой другой вершины минимально; это расстояние называют *радиусом* $\operatorname{rad}(G) = \min\limits_{v\in V} \max\limits_{u\in V} \rho(u, v)$.

1. Дерево имеет 2019 вершин. Верно ли, что в нём найдется путь длины 3?

2. Существует ли дерево на 9 вершинах, в котором 2 вершины имеют степень 5?

3. В дереве нет вершин степени 2. Докажите, что количество висячих вершин (т.е. вершин степени 1) больше половины общего количества вершин.

Остовным деревом называют подграф графа, который является деревом на всех вершинах исходного графа.

4. Докажите, что любой связный граф имеет остовное дерево

5. Про граф известно, что в нём 1000 вершин и 2019 рёбер. Верно ли, что **а)** в таком графе обязательно есть маршрут длины 3000;

б) в таком графе может не оказаться ни одного пути длины 64?

6. Докажите или опровергните следующие утверждения:

а) если в графе есть замкнутый маршрут чётной длины, то в графе есть цикл чётной длины;

б) если в графе есть замкнутый маршрут нечётной длины, то в графе есть цикл нечётной длины.

7. 1. Докажите, что любое дерево 2-раскрашиваемо (существует правильная раскраска в 2 цвета).

2. Сколько есть правильных 2-раскрасок у дерева?

8. Докажите, что если G содержит клику размера n, то его вершины нельзя раскрасить правильно в $n - 1$ цветов.

9. Имеется связный граф. Докажите, что в нём можно выбрать одну из вершин так, чтобы после её удаления вместе со всеми ведущими из неё рёбрами останется связный граф.

10. 1. Докажите, что $\operatorname{rad}(G) \leqslant \operatorname{diam}(G) \leqslant 2\operatorname{rad}(G)$.

2. Приведите пример графа G, для которого $\operatorname{rad}(G) = \operatorname{diam}(G)$.

Домашнее задание 5.

1. Степень каждой вершины графа равна 2. Верно ли, что этот граф 2-раскрашиваемый?

2. Докажите, что в дереве на $2n$ вершинах есть независимое множество размера n (ни одна пара вершин множества не соединена ребром).

3. В дереве на 2019 вершинах ровно три вершины имеют степень 1. Сколько вершин имеют степень 3?

4. Есть два дерева на n вершинах, каждое имеет диаметр длины d. Можно ли так добавить ребро между вершинами этих деревьев, чтобы длина диаметра полученного дерева равнялась d?

5. Докажите, что если степень каждой вершины графа не превосходит d, то его можно правильно раскрасить в $d+1$ цвет.

6. Назовем не 2-раскрашиваемый граф минимальным, если после удаления любого ребра он становится 2-раскрашиваемым. Докажите, что в минимальном не 2-раскрашиваемом графе на 1000 вершинах есть хотя бы одна изолированная вершина (т.е. вершина степени 0).

7. Пусть G — связный граф, который не является графом-путём. Докажите, что в G есть три вершины v_1, v_2, v_3, в результате удаления которых вместе со всеми смежными рёбрами, получается связный граф $G' = G[V \setminus \{v_1, v_2, v_3\}]$.

8. Граф получен из графа-цикла C_{2n} добавлением рёбер, соединяющих противоположные вершины (v_1 соединена с v_{n+1}, v_2 с v_{n+2} и т.д.). При каких n получившийся граф правильно раскрашиваемый

а) в два цвета; **б)** в три цвета?

9. В графе на 100 вершинах, каждая из которых имеет степень 3, есть ровно 600 путей длины 3. Сколько в этом графе циклов длины 3?

10*. Докажите, что если размер максимальной клики в графе четный, то можно раскрасить вершины графа в два цвета так, что размеры максимальных клик в подграфах обоих цветов равны (подграф индуцирован множеством вершин одного цвета).