

Неделя 6. Двудольные графы, паросочетания и функции

Напоминание: функции не обязательно всюду определены, однако обозначение $f : A \rightarrow B$ означает, что множество A — область определения функции f .

1. Функция f из множества $\{1, 2, \dots, 8\}$ в множество $\{a, b, \dots, e\}$ определена следующим образом:

$$f : 1 \mapsto a, \quad 2 \mapsto a, \quad 3 \mapsto c, \quad 4 \mapsto d, \quad 5 \mapsto c, \quad 7 \mapsto d.$$

Найдите а) $\text{Dom}(f)$; б) $\text{Range}(f)$; в) $f(\{1, 2, 3\})$;

г) $f^{-1}(c)$; д) $f(\{1, 2, 3, 5, 6\})$; е) $f^{-1}(\{a, b, c\})$.

2. Функция g из множества положительных целых чисел в множество положительных целых чисел сопоставляет числу x наибольший простой делитель x .

1. Какова область определения g ?

2. Верно ли, что если X — конечное, то и $g^{-1}(X)$ конечное?

3. Найдите $g^{-1}(3)$.

3. Пусть f — функция из множества A в множество B , $X, Y \subseteq A$, $U, V \subseteq B$. Верны ли для любых множеств f , A , B , X , Y , U , V следующие утверждения:

а) $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$;

б) из равенства $f(X) = f(Y)$ следует $X \cap Y \neq \emptyset$;

в) $f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$;

г) из равенства $f^{-1}(U) = f^{-1}(V)$ следует $U = V$.

4. Функция f определена на множестве X и принимает значения в множестве Y , при этом $B \subseteq Y$. Какой знак сравнения можно поставить вместо «?», чтобы утверждение « $f(f^{-1}(B)) ? B$ » стало верным?

5. Пусть A и B — два множества. Покажите равносильность свойств «существует функция $f : A \rightarrow B$, являющаяся инъекцией» и «существует функция $f : B \rightarrow A$, являющаяся сюръекцией».

6. Приведите пример сюръекции множества положительных целых чисел на себя, для которой прообраз любого 1-элементного множества бесконечен.

Паросочетание *покрывает* вершину графа, если оно содержит ребро, смежное этой вершине.

7*. Дан двудольный граф $G(A \cup B, E)$. В G есть два паросочетания. Докажите, что есть третье, которое покрывает все вершины первого паросочетания из доли A и все вершины второго паросочетания из доли B .

Домашнее задание 6.

1. Функция h из множества $\{0, 1, \dots, 8\}$ в множество $\{a, b, \dots, g\}$ определена следующим образом:

$$h : 1 \mapsto b, \quad 2 \mapsto c, \quad 3 \mapsto b, \quad 4 \mapsto e, \quad 5 \mapsto b, \quad 6 \mapsto e, \quad 8 \mapsto f.$$

Найдите **а)** $\text{Dom}(h)$; **б)** $\text{Range}(h)$; $h(\{0, 1, 2, 3, 4\})$; **в)** $h^{-1}(\{a, b, c\})$;

г) $h^{-1}(h(\{0, 1, 2, 6, 7, 8\}))$; **д)** $h(h^{-1}(\{a, b, c, d, e\}))$.

2. Функция f из множества целых чисел в множество целых чисел сопоставляет числу x наименьшее простое число, которое больше x^2 . Докажите, что если множество целых чисел X конечно, то и полный прообраз этого множества $f^{-1}(X)$ конечен.

3. Пусть f — функция из множества X в множество Y , при этом $A \subseteq X$. Какой знак сравнения можно поставить вместо «?», чтобы утверждение

$$f^{-1}(f(A)) ? A$$

стало верным? (Возможные знаки сравнения в этой и двух следующих задачах: \subseteq , \supseteq , $=$. Нужно учесть все варианты.)

4. Пусть f — функция из множества $A \cup B$ в множество Y . Какой знак сравнения можно поставить вместо «?», чтобы утверждение

$$f(A \setminus B) ? f(A) \setminus f(B)$$

стало верным?

5. Пусть f — функция из множества X в множество Y , при этом $A \cup B \subseteq Y$. Какой знак сравнения можно поставить вместо «?», чтобы утверждение

$$f^{-1}(A \setminus B) ? f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$$

стало верным?

Напомним, что *паросочетанием* (в произвольном) графе называется множество рёбер, не имеющих общих концов; паросочетание называется *совершенным*, если каждая вершина графа принадлежит некоторому ребру паросочетания.

6. Верно ли, что если каждая вершина графа имеет степень 1 или 2 и в графе нет циклов нечётной длины, то в графе есть совершенное паросочетание?

7. Про функцию f из множества X в множество Y и множество $B \subseteq Y$ известно, что $f^{-1}(B) = X$. Верно ли, что $B = Y$?

8. Приведите пример такой инъекции f из множества X в множество Y , что для некоторого $B \subseteq Y$ выполняются оба условия

$$\begin{cases} B \neq \emptyset, \\ f^{-1}(B) = \emptyset. \end{cases}$$

9. Постройте биекцию между конечными подмножествами множества положительных целых чисел и конечными строго возрастающими последовательностями положительных целых чисел.