Неделя 7. Комбинаторика I. Правила суммы и произведения

1. Есть 3 гвоздики, 4 розы и 5 тюльпанов.

а) Сколькими способами можно составить букет из цветов одного вида?

б) Сколькими способами из них можно составить букет, в котором нечётное количество цветов каждого вида?

в) Сколькими способами можно составить букет, используя любые из имеющихся цветов?
(Цветы одного сорта считаем одинаковыми, количество цветов в букете не ограничено, но не равно 0.)

2. На плоскости отмечено 10 точек так, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

3. Сколько существует 9-значных чисел, цифры которых расположены в порядке убывания (то есть каждая следующая меньше предыдущей)?

4. Найдите вероятность того, что в случайном 4-буквенном слове в русском алфавите, есть хотя бы одна гласная? (Всего 33 буквы, 10 из них гласные.)

Комментарий: *Под вероятностью мы понимаем отношение количества всех исходов, удовлетворяющих событию, к количеству всевозможных исходов.*

5. Докажите, что двоичных последовательностей (слов) длины n, в которых ровно k единиц столько же, сколько и подмножеств размера k множества $\{1, 2, \ldots, n\}$.

6. Лестница состоит из 13 ступенек, не считая верхней и нижней площадок. Спускаясь, можно перепрыгивать через некоторые ступеньки (можно даже через все). Сколькими способами можно спуститься по этой лестнице?

Семейством (множеств) называется множество, элементами которого являются множества. *Разбиением* множества A на подмножества называется семейство $\mathcal{B}$, такое что $A = \bigcup\limits_{B \in \mathcal{B}} B$, $\forall B, B' \in \mathcal{B} : B \neq B' \Rightarrow B \cap B' = \varnothing$. То есть, разбиение A — это семейство его непустых попарно непересекающихся подмножеств, дающих в объединении A. Множества $B \in \mathcal{B}$ называют *блоками* разбиения $\mathcal{B}$.

7. Чего больше, разбиений 20-элементного множества на 6 (непустых) подмножеств или его подмножеств размера 5?

8. 10 человек случайно выстроились в очередь. Найдите вероятность того, что **а)** Иванов, Петров и Сидоров стоят подряд (в произвольном порядке); **б)** Иванов стоит раньше Петрова; **в)** Иванов и Петров не стоят друг за другом?

9. Сколькими способами можно образовать 6 пар из 12 человек?

10. Сколькими способами можно расставить 12 белых и 12 черных шашек на черных полях шахматной доски?

11. Сколькими способами можно выписать в ряд цифры от 0 до 9 так, чтобы четные цифры шли в порядке возрастания, а нечетные — в порядке убывания?

Домашнее задание 7.

1. Есть 6 кандидатов на 6 вакансий. Сколькими способами можно заполнить вакансии? (Каждая вакансия должна быть заполнена.)

2. а) Каких чисел больше среди первого миллиона: тех, в записи которых есть единица или тех, в записи которых её нет?

б) Тот же вопрос для первых 10 миллионов чисел.

3. Найдите вероятность того, что в десятичной записи случайного шестизначного числа, в записи будет хотя бы две одинаковые цифры?

4. Из 36-карточной колоды карт на стол равновероятно и случайно выкладывается последовательность из 4 карт. Какова вероятность того, что две из них красные, а две черные?

5. Сколько существует 6-значных чисел, в которых чётных и нечётных цифр поровну?

6. Сколько существует 7-значных чисел, в которых ровно две четные цифры и перед каждой четной цифрой обязательно стоит нечетная?

7. Сколькими способами можно поселить 7 студентов в три комнаты: одноместную, двухместную и четырехместную?

Вершинами *полного бинарного дерева ранга* n являются двоичные слова длины не больше n (включая *пустое слово* длины 0). Два слова соединены ребром в полном бинарном дереве, если одно получается из другого приписыванием одной цифры справа (нуля или единицы).

8. Найдите количество диаметров в полном бинарном дереве ранга n.

9. *Разбиением* числа N на k частей называется такая невозрастающая последовательность положительных целых чисел $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_k$, что $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k = N$. Чего больше, разбиений числа N на не более чем k слагаемых, или разбиений числа $N + k$ на ровно k слагаемых?

10. Чего больше, правильных скобочных последовательностей из n пар скобок или последовательностей $(x_1, x_2, \ldots, x_{2n})$ с элементами ± 1, таких что $\sum\limits_{i=1}^{2n} x_i = 0$?