Неделя 8. Комбинаторика II. Биномиальные коэффициенты

1. Ладья стоит на левом поле клетчатой полоски 1×30 и за ход может сдвинуться на любое количество клеток вправо.

а) Сколькими способами она может добраться до крайнего правого поля?

б) Сколькими способами она может добраться до крайнего правого поля ровно за 7 ходов?

2. Найдите коэффициент при **а)** x^3y^7 в разложении $(2x-y)^{10}$;

б) $x_1^3x_2x_4^5x_5$ в разложении $(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)^{10}$.

3. Докажите справедливость формул (желательно найти комбинаторное доказательство):

а) $\displaystyle\sum_{j=0}^{k}\binom{r}{j}\binom{s}{k-j}=\binom{r+s}{k}$; **б)** $\displaystyle\sum_{j=0}^{n}\binom{j}{k}=\binom{n+1}{k+1}$.

4. Найдите число решений уравнения $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=11$ в неотрицательных целых числах.

5. Сколькими способами можно разделить 15 одинаковых монет между 7 нумизматами так, чтобы каждому досталось хотя бы по монете?

6. Сколько различных слов (не обязательно осмысленных) можно получить, переставляя буквы в словах

а) «КОМПЬЮТЕР»; **б)** «ЛИНИЯ»; **в)** «ПАРАБОЛА»;

г) «ОБОРОНОСПОСОБНОСТЬ».

7. Сколькими способами можно выбрать 6 чисел от 1 до 15, чтобы среди них не было двух, отличающихся на единицу?

8. Докажите, что

$$\binom{n+k+1}{k}=\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+\ldots+\binom{n+k}{k}.$$

9. *Разложением* числа n называется такая последовательность положительных целых чисел $x_1, x_2, \ldots, x_k$, что $x_1+x_2+\cdots+x_k=n$. Найдите количество разложений n на нечетные слагаемые.

10*. Сколькими способами можно разрезать правильный n-угольник на треугольники, проводя непересекающиеся диагонали?

Дискретная математика **Основной поток**

Домашнее задание 8.

1. Робот ходит по координатной плоскости. На каждом шаге он может увеличить одну координату на 1 или обе координаты на 2. Сколько есть способов переместить Робота из точки $(0, 0)$ в точку $(4, 5)$?

2. В магазине продается 10 видов пирожных. Сколькими способами можно купить 100 пирожных (порядок покупки не важен)?

3. Какое слагаемое в разложении $(1 + 2)^n$ по формуле бинома Ньютона будет наибольшим?

4. Найдите число слов длины n над алфавитом $\{0, 1\}$, в которых нет двух единиц подряд.

5. Дать комбинаторное доказательство тождества

а) $\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$;

б) $\binom{n}{m} = \binom{n-2}{m} + 2\binom{n-2}{m-1} + \binom{n-2}{m-2}$.

6. Какое из чисел больше $\binom{F_{1000}}{F_{998}+1}$ или $\binom{F_{1000}}{F_{999}+1}$?
Здесь F_n — n-е число Фибоначчи.

7. Приведите комбинаторное доказательство равенства

$$\sum_{0 \leqslant k \leqslant (n+1)/2} \binom{n-k+1}{k} = F_{n+2}.$$

8. Сколько способов разместить 20 различных книг на 5 полках, если каждая полка может вместить все 20 книг? Размещения, отличающиеся порядком книг на полках, считаются различными.

9. Студсовет из 8 человек выбирает из своего состава председателя путем тайного голосования. Каждый может отдать один голос за любого члена студсовета. Результат голосования – число голосов, отданных за каждого кандидата. Сколько существует различных результатов голосования?

10. Сколькими способами можно переставить буквы в слове «ОБОРОНОСПОСОБНОСТЬ», так чтобы две буквы «О» не стояли рядом?