Неделя 9. Комбинаторика III. Формула включений-исключений

1. В группе 40 туристов. Из них 20 человек говорят по-английски, 15 — по-французски, 11 — по-испански. Английский и французский знают семь человек, английский и испанский — пятеро, французский и испанский — трое. Два туриста говорят на всех трёх языках. Сколько человек группы не знают ни одного из этих языков?

2. В группе студентов есть один, который знает C++, Java, Python, Haskell. Каждые три из этих языков знают два студента. Каждые два — 6 студентов. Каждый из этих языков знают по 15 студентов. Каково наименьшее количество студентов в такой группе?

3. В стране пять городов: А, Б, В, Г и Д. Их хотят связать четырьмя авиалиниями так, чтобы из каждого города можно было (возможно, с пересадками) долететь до любого другого. Сколькими различными способами это можно сделать?

4. Функция неубывающая, если $x \leqslant y$ влечет $f(x) \leqslant f(y)$. Найдите количество **а)** неубывающих инъекций $f\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, m\}$;

б) неубывающих сюръекций $f\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, m\}$.

5. Найдите количество функций f из $\{1, \ldots, 7\}$ в $\{1, \ldots, 7\}$, таких что $f(\{1, 2, 3\}) = \{4, 5, 6\}$ и $f^{-1}(\{1, 2, 3\}) = \{4, 5, 6\}$ (на $f(7)$ и $f^{-1}(7)$ дополнительных ограничений нет). Ответом на вопрос задачи должно быть число в десятичной записи.

6. При изготовлении пирожные — колечки трех сортов: шоколадные, с корицей и с орехами — упаковываются в стандартные коробки по 18 колечек в каждой. Каждая коробка может содержать колечки всех видов. Порядок колечек в коробке не существенен. Сколько можно составить различных наборов колечек при условии, что в коробке шоколадных колечек не более 9, колечек с корицей не более 3, а ореховых не более 9?

7. Сколько имеется различных булевых функций от n переменных, принимающих значение 1 только на тех наборах, в которых содержится ровно k единиц? (но не обязательно на всех таких наборах)

8. Функция Эйлера $\phi(n)$ возвращает количество положительных взаимнопростых с $n \geqslant 1$ чисел, непривосходящих n. Докажите формулу:

$$\phi(n) = n \times \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \times \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \times \ldots \times \left(1 - \frac{1}{p_r}\right),$$

в которой $p_1, \ldots, p_r$ — все различные простые делители числа $n > 1$.

9. Дан выпуклый n-угольник ($n \geqslant 5$). Сколькими способами можно выбрать в нём две непересекающиеся диагонали? Порядок выбора не важен.

10. Найдите значение булевой функции при всех значениях переменных:

$$x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus (x_1 \wedge x_2) \oplus (x_2 \wedge x_3) \oplus (x_3 \wedge x_1).$$

Загадка: *причём тут формула включений-исключений?*

11*. Чего больше: инъективных отображений 5-элементного множества в 20-элементное или сюръективных отображений 20-элементного множества в 5-элементное?

Домашнее задание 9.

1. Сколькими способами можно закрасить клетки таблицы 3×4 так, чтобы незакрашенные клетки содержали или верхний ряд, или нижний ряд, или две средних вертикали?

2. Для полета на Марс набирают группу людей, в которой каждый должен владеть хотя бы одной из профессий повара, медика, пилота или астронома. При этом в техническом задании указано, что каждой профессией из списка должно владеть ровно 6 человек в группе. Кроме того указано, что в группе должен найтись ровно один человек, владеющий всеми этими профессиями; каждой парой профессий должны владеть ровно 4 человека; каждой тройкой — ровно 2.

Выполнимо ли такое техническое задание?

3. Пусть A и B — конечные непустые множества, и $|A| = n$. Известно, что число инъекций из A в B совпадает с числом сюръекций из A в B. Чему равно это число?

4. В классе 20 учеников, каждый из которых дружит ровно с шестью одноклассниками. Найдите число таких различных компаний из трёх учеников, что в них либо все школьники дружат друг с другом, либо каждый не дружит ни с одним из двух оставшихся.

5. Найдите количество неубывающих отображений

$$f\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, m\}.$$

6. Чего больше, разбиений n-элементного множества на не более чем k подмножеств или разбиений $(n + k)$-элементного множества на ровно k подмножеств? Определение разбиения приведено в листке недели 7.

7. Сколькими способами можно рассадить за круглым столом n пар влюблённых так, чтобы ни одна пара влюблённых не сидела рядом.

8. Есть n конфет и m коробок. Найдите число способов разместить конфеты по коробкам для каждого из условий (все конфеты должны быть разложены): **а)** и конфеты и коробки разные; **б)** конфеты одинаковые, коробки разные, не должно быть пустых коробок; **в)** конфеты одинаковые, коробки разные; **г)** и конфеты и коробки разные, не должно быть пустых коробок; **д)** конфеты разные, коробки одинаковые, не должно быть пустых коробок; **е)** конфеты разные, коробки одинаковые.

Укажите тип отображения, соответствующий размещению, если это возможно.