

Неделя 10. Бинарные отношения и их графы. Отношения эквивалентности

Обозначения: xPy сокращение для $(x, y) \in P$. По аналогии с отношениями типа «больше». P^{-1} — обратное отношение, содержит такие пары (x, y) , что $(y, x) \in P$. \overline{P} — дополнительное отношение, содержит пары, не содержащиеся в P . $\text{id}_A = \{(a, a) \mid a \in A\}$ — «единичное» отношение на множестве A . Операция композиции $Q \circ P \subseteq X \times Z$ отношений $P \subseteq X \times Y$ и $Q \subseteq Y \times Z$ задана формулой:

$$Q \circ P = \{(x, z) \mid \exists y \in Y : (xPy) \wedge (yQz)\}.$$

Обратите внимание на порядок операндов, он выбран так, чтобы согласовываться с операцией композиции функций: композиция $f \circ g$ — это функция $f(g(x))$.

1. Нарисуйте двудольный граф соответствующий бинарному отношению $R \subseteq \{a, b, c, d, e\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:

$$R = \{(a, 1), (a, 2), (b, 4), (c, 3), (d, 5)\}.$$

а) Является ли R функцией? б) Является ли R^{-1} функцией?

2. Ответьте на следующие вопросы для бинарного отношения $R \subseteq \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$. Является ли R рефлексивным? симметричным? транзитивным? отношением эквивалентности? Для каждого отношения R нарисуйте соответствующий граф. Используйте неориентированный граф для симметричных бинарных отношений, в случае нерефлексивных бинарных отношений используйте петли.

а) $R = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$; б) $R = \{(1, 2), (2, 1), (1, 1)\}$

в) $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$; г) $R = \{(x, y) \mid x, y \in \{1, 2, 3\}\}$; д) $R = \emptyset$.

3. Найдите результат операций над отношениями, определенными на множестве действительных чисел.

$$\begin{aligned} \text{а)} & \overline{(>)}; & \text{б)} & (>)^{-1}; & \text{в)} & (\geq)\Delta(\leq); & \text{г)} & (>) \cap (<); \\ \text{д)} & (=) \circ (>); & \text{е)} & (<) \circ (<); & \text{ж)} & (<) \circ (>). \end{aligned}$$

4. Являются ли следующие отношения рефлексивными, симметричными транзитивными:

а) «точки a и b лежат на одной прямой»;

б) «прямая a перпендикулярна прямой b »;

в) «прямая a параллельна прямой b » (ответ зависит от того, по какому учебнику вы изучали геометрию);

г) «для функций $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ выполнено $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ »?

5. Пусть $f : A \rightarrow B$ — некоторое отображение. Будут ли следующие отношения отношениями эквивалентности на множестве A :

а) $x \sim_f y \iff f(x) = f(y)$; б) $x \sim_{\bar{f}} y \iff f(x) \neq f(y)$?

В случае положительного ответа на вопрос, опишите классы эквивалентности для соответствующего отношения.

6. Найдите $R \circ R$, где $R(x, y)$ — бинарное отношение на множестве \mathbb{R} , означающее, что

а) $y = x + 1$; б) $x + y = 1$.

7. Пусть $P \subseteq A \times A$ и $Q \subseteq B \times B$ — отношения эквивалентности. Будет ли отношением эквивалентности отношение $R \subseteq (A \times B) \times (A \times B) : (a, b)R(a', b') \iff aPa', bQb'$?

Домашнее задание 10.

1. Ответьте на следующие вопросы для бинарного отношения $R \subseteq \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$. Является ли R рефлексивным? симметричным? транзитивным? отношением эквивалентности? Для каждого отношения R нарисуйте соответствующий граф. Используйте неориентированный граф для симметричных бинарных отношений, в случае нерефлексивных бинарных отношений используйте петли.
 - а) $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (1, 3), (3, 2)\}$;
 - б) $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$.
2. Выразите отношение «племянник» через отношения «отец» и «мать» и операции над отношениями.
3. Пусть бинарные отношения $P_1, P_2 \subseteq A \times A$ транзитивны. Будут ли $\overline{P_1}$, $P_1 \cap P_2$, $P_1 \cup P_2$, $P_1 \circ P_2$ обладать теми же свойствами?
4. Бинарное отношение на множестве из 6 элементов содержит 33 пары. Может ли оно быть
 - а) симметричным; б) транзитивным?
5. Какие из следующих бинарных отношений на множестве \mathbb{N} — отношения эквивалентности?
 - а) xPy : y чисел x и y одинаковая последняя цифра (здесь и далее в десятичной записи)
 - б) xQy : числа x и y отличаются в ровно одной цифре.
 - в) xRy : разница между суммами цифр S_x и S_y чётна. Формально: пусть $\overline{x_n x_{n-1} \dots x_1 x_0}$ — десятичная запись числа x ; $S_x = \sum_{k=0}^n x_k$.
6. Найдите число отношений эквивалентности на множестве $\{1, 2, 3, 4\}$.
7. Об отображениях (всюду определенных функциях) f, g из множества A в себя известно, что $f \circ g \circ f = \text{id}_A$. Верно ли, что f — биекция? (Множество A не обязательно конечное.)
8. Пусть R — отношение эквивалентности на множестве A . Докажите, что существуют такие множество B и отображение $f : A \rightarrow B$, что каждый класс эквивалентности C представим в виде $C = f^{-1}(b)$ для некоторого элемента $b \in B$.
9. Множество A состоит из семи элементов. Найдите количество отображений $f : A \rightarrow A$, таких что $f \circ f = \text{id}_A$.