Неделя 11. Ориентированные графы и отношения порядка

Два графа $G(V, E)$ и $G'(V', E')$ называют *изоморфными*, если существует биекция $f : V \to V'$, такая что $(u, v) \in E \iff (f(u), f(v)) \in E'$.

Отношением частичного порядка (порядком) называют антисимметричное и транзитивное отношение $P \subseteq A \times A$, которое либо рефлексивно, либо антирефлексивно. В первом случае отношение порядка называют *нестрогим* и обозначают $\leqslant$, а во втором – *строгим* и обозначают $<$. Каждому отношению порядка $<$ ($\leqslant$) ставят в соответствие отношение *непосредственного следования* $\prec$:

$$\prec = \{(x, y) \mid (x < y) \land \neg(\exists z : x < z \land z < y)\}.$$

Отношения частичного порядка $\leqslant_P \subseteq A \times A$ и $\leqslant_Q \subseteq B \times B$ называются *изоморфными*, если существует такая биекция $f : A \to B$, что $x \leqslant_P y \iff f(x) \leqslant_Q f(y)$.

1. Вершины ориентированного графа — целые числа от 0 до 9. Ребро идет из вершины x в вершину y если $y - x = 3$ или $x - y = 5$. Найдите количество компонент сильной связности в этом графе.

2. а) 50 команд сыграли турнир по волейболу в один круг. Говорят, что команда A сильнее B, если A выиграла у B или есть команда C, такая, что A выиграла у C, а C выиграла у B. Доказать, что команда, набравшая наибольшее число очков, сильнее любой другой.

б) Является ли отношение «сильнее» отношением порядка на множестве команд?

3. Сколько существует различных нестрогих частичных порядков на множестве $V = \{0, 1, 2\}$? Мы считаем порядки P и Q различными, если они не изоморфны друг другу. Постройте графы $(V, \prec_P)$ для каждого порядка.

4. Вершинами графа, который называется *булев куб размерности* n и обозначается B_n, являются двоичные слова длины n, а соседями (вершинами, соединёнными ребром) являются пары слов, отличающихся в одной позиции.

а) Сколько вершин в булевом кубе B_n?

б) Сколько рёбер в булевом кубе B_n?

в) Сколько в булевом кубе B_n путей длины 2?

г) Верно ли, что в графе B_3 есть маршрут длины 3000?

д) Верно ли, что в графе B_3 есть путь длины 8? длины 7?

5. Граф $S_n = \langle V, E\rangle$ имеет множество вершин $V = 2^{\{1,2,\ldots,n\}}$ (вершина $v \in V$ – подмножество множества $\{1, 2, 3, \ldots n\}$); вершины v и u соединены ребром тогда и только тогда, когда $|u \triangle v| = 1$.

1. Докажите, что граф S_n изоморфен булеву кубу B_n.

2. Сколько существует различных наборов подмножеств $A_1, A_2, A_3 \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, для которых выполняется $|A_1 \triangle A_2| = |A_2 \triangle A_3| = 1$?

6. Ориентируем граф S_n так, что $u \to v$ если $|u| < |v|$. Получившийся граф задаёт отношение непосредственного следования $\prec$.

1. Опишите соответствующее $\prec$ отношение частичного порядка $\leqslant$.

2. Ориентируем булев куб B_n направив стрелки от вершин, в которых различающаяся координата равна нулю. Получившийся граф задаёт покоординатный порядок (отношение $\prec$) на множестве $\{0, 1\}^n$. Докажите, что этот порядок изоморфен порядку из предыдущего пункта.

7. Верно ли, что если P – отношение частичного порядка, то следующие отношения также будут задавать частичные порядки: **а)** P^{-1}; **б)** $\overline{P}$?

8. Найдите максимальное количество простых путей с заданными концами в ориентированном ациклическом графе на n вершинах.

9. Известно, что в ориентированном графе на $\geqslant 2$ вершинах из любой вершины в любую другую идёт ровно один путь. Верно ли, что выходные (они же исходящие) степени вершин в этом графе равны 1?

10. Предположим, что последовательность чисел задана соотношением $a_{n+1} = f(a_n)$, где f — некоторая функция (определённая на всех числах).

а) Покажите, что либо все члены последовательности различны, либо она периодична: после некоторого начала (предпериода) числа начинают повторяться (период).

б) Покажите, что второй случай имеет место тогда и только тогда, когда $a_{2n} = a_n$ при некотором n.

Дискретная математика **Основной поток**

Домашнее задание 11.

1. Известно, что в неориентированном графе существует маршрут, проходящий по каждому ребру ровно два раза. Верно ли, что в графе есть замкнутый эйлеров маршрут?

2. Выходная (она же исходящая) степень каждой вершины в ориентированном графе на n вершинах равна $n-2$. Какое количество компонент сильной связности может быть в этом графе? Укажите все возможные значения.

3. Пусть в ориентированном графе для любой пары вершин u, v есть либо ребро (u, v), либо ребро (v, u) (ровно одно из двух). Докажите, что в таком графе есть (простой) путь, включающий в себя все вершины.

4. Профессор Рассеянный построил частичный порядок $<_P$ для утреннего одевания:

очки $<_P$ *брюки* $<_P$ *ремень* $<_P$ *пиджак,*
очки $<_P$ *рубашка* $<_P$ *галстук* $<_P$ *пиджак,*
брюки $<_P$ *туфли,*
очки $<_P$ *носки* $<_P$ *туфли,*
очки $<_P$ *часы.*

а) Постройте линейный порядок на вещах так, чтобы исходный порядок их одевания не был нарушен.

б) Сколько всего существует таких линейных порядков?

5. В Вестеросе n городов, каждые два соединены дорогой. Дороги сходятся лишь в городах (нет перекрестков, одна дорога поднята эстакадой над другой). Злой волшебник хочет установить на всех дорогах одностороннее движение так, что если из города можно выехать, то в него нельзя вернуться. 1. Докажите, что

а) волшебник может это сделать;

б) найдется город, из которого можно добраться до всех, и найдется город, из которого нельзя выехать;

в) существует единственный маршрут, обходящий все города.

2. Сколькими способами волшебник может осуществить свое намерение?

Бинарное отношение $R \subseteq A \times A$ называется *линейным*, если

$$\forall x, y \in A : x \neq y \Rightarrow (xRy) \vee (yRx).$$

6. Бинарное отношение P называется турниром, если оно антирефлексивно, антисимметрично и линейно. (Неформально — это результат кругового турнира — каждую альтернативу сравнили с каждой и запомнили результат). Докажите, что либо турнир — строгий линейный порядок, либо существуют такие альтернативы a, b, c, что aPb, bPc и cPa.

7. Сколько есть порядков на n-элементном множестве, в которых ровно одна пара элементов несравнима?

8. Докажите, что любой частичный порядок P на конечном множестве A можно продолжить до линейного. То есть можно добавить в P некоторые пары элементов из $A \times A$ так, что любые два элемента $a, b \in A$ окажутся сравнимы: будет выполнено либо aPb либо bPa.

9. Граф G имеет множество вершин $V = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$. Граф G содержит ребро $\{u, v\}$ (для определённости $u < v$), если v делится на u и не существует (отличной от v и u) вершины $s \in V$, такой что и v делится на s и s делится на u.

1. Постройте граф G. 2. Изоморфен ли этот граф булеву кубу B_3? При положительном ответе укажите биекцию.