**Дискретная математика** **Основной поток**

## Неделя 12. Делимость и вычеты

**1.** Известно, что $a, b, c, d$ — положительные целые числа, $ab = cd$ и $a$ делится на $c$. Докажите, что $d$ делится на $b$.

**2.** При делении некоторого целого числа $m$ на 13 и 15 получили одинаковые частные, но первое деление было с остатком 8, а второе без остатка. Найдите число $m$.

**3.** Найдите остаток при делении

**а)** $100^{100}$ на 99;

**б)** $\binom{15}{8}$ на 13;

**в)** $20^2 + 21^2 + 22^2$ на 23;

**г)** $\binom{32}{3}$ на 33;

**д)** $8^{8^{8^8}}$ на 13.

**4.** Сформулируйте и докажите признак делимости **а)** на 9; **б)** на 11. (В десятичной системе счисления.)

**5. а)** Какой может быть последняя цифра степени тройки в десятичной записи? **б)** Докажите, что предпоследняя цифра степени тройки всегда четна.

**6. а)** Пусть $p$ — простое число, большее 3. Докажите, что $p^2 - 1$ делится на 24. **б)** Докажите, что при любом целом $a$ число $a^{73} - a$ делится на 2, на 3, на 5, на 7, на 13, на 19, на 37, на 73.

**7.** Докажите, что $(p-1)!$ дает остаток $-1$ по модулю $p$ для любого простого числа $p$.

**8.** Докажите, что для любого целого положительного $n \geqslant 2$ между $n$ и $n!$ есть простое число.

**Дискретная математика** **Основной поток**

**Домашнее задание 12**

**Это задание сдаётся на первом семинаре после новогодних каникул!**

**1.** Найдите две последние цифры числа $99^{1000}$.

**2.** Какие из следующих утверждений о целых числах $a$, $b$, $c$ верны: (1) если $a$ делится на $c$, а $b$ не делится на $c$, то $a+b$ не делится на $c$; (2) если $a$ не делится на $c$ и $b$ не делится на $c$, то $a+b$ не делится на $c$; (3) если $a$ не делится на $c$ и $b$ не делится на $c$, то $ab$ не делится на $c$; (4) если $a$ делится на $b$ и $b$ делится на $c$, то $ab$ делится на $c^2$? Докажите верные и приведите контрпримеры к неверным.

*Примечание.* В этой задаче правильный и обоснованный ответ на каждый из пунктов дает 1 балл в общую оценку за задачу (максимум 4 балла).

**3.** Пусть $x$, $y$ — целые числа. Докажите, что число $x + 10y$ делится на 13 тогда и только тогда, когда $y + 4x$ делится на 13.

**4.** Положительное целое число $a$ чётно, но не делится на 4. Покажите, что количество (положительных) чётных делителей $a$ равно количеству (положительных) нечётных делителей $a$.

**5.** Может ли целое положительное число, в десятичной записи которого 100 нулей, 100 единиц и 100 двоек, быть точным квадратом? (Т.е. квадратный корень целый.)

**6.** Докажите, что числа $a^2$ и $b^2$ дают одинаковые остатки при делении на $a-b$, если $a$ и $b$ — положительные целые числа, и $a > b$.

**7.** Найдите наименьшее целое положительное число $N$ такое, что и сумма цифр десятичной записи числа $N$, и сумма цифр десятичной записи числа $N+1$ делятся на 7.

**8.** Известно, что $a^{10} + b^{10} + c^{10} + d^{10} + e^{10} + f^{10}$ делится на 11. Докажите, что $abcdef$ делится на $11^6$. Здесь $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$ — целые числа.