

Неделя 13. Арифметика остатков II

Преамбула. Если в задаче просят найти количество сравнений (или количество решений уравнения), то речь идёт о количестве остатков по указанному модулю (или, что то же самое, о количестве вычетов).

1. Найдите количество решений сравнения $39x \equiv 104 \pmod{221}$.
2. Найдите решения уравнения $45x - 37y = 25$ в целых числах.
3. Найдите остаток при делении числа $\underbrace{111 \dots 111}_{105 \text{ цифр}}$ на 107. (Использована десятичная система.)
4. Пусть $\text{НОД}(a, b) = 1$. Найдите все возможные значения $\text{НОД}(a + b, a^2 + b^2)$.
5. Решите систему сравнений

$$x \equiv 3 \pmod{13},$$

$$x \equiv 4 \pmod{14},$$

$$x \equiv 5 \pmod{15}.$$

6. Решите систему сравнений

$$x \equiv 3 \pmod{15},$$

$$x \equiv 4 \pmod{21},$$

$$x \equiv 5 \pmod{35}.$$

7. Найдите остатки от деления **а)** 19^{10} на 66; **б)** 19^{14} на 70; **в)** 17^9 на 48; **г)** $14^{14^{14}}$ на 100.
8. Формулы включения – исключения для НОК и НОД. Докажите, что для положительных x, y, z выполняются равенства
 - а) $\text{НОК}(x, y) = \frac{xy}{\text{НОД}(x, y)}$;
 - б) $\text{НОК}(x, y, z) = \frac{xyz \cdot \text{НОД}(x, y, z)}{\text{НОД}(x, y) \cdot \text{НОД}(x, z) \cdot \text{НОД}(y, z)}$;
 - в) попробуйте выразить $\text{НОК}(x_1, \dots, x_n)$ аналогичным образом.
9. Решите уравнение **а)** $\varphi(x) = x/3$; **б)** $\varphi(x) = x/4$.
10. Докажите, что $(p - 1)!$ даёт остаток -1 по модулю p для любого простого числа p .

Домашнее задание 13

1. Докажите, что если $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(a, c) = 1$, то $\text{НОД}(a, bc) = 1$.
2. Найдите вычет, обратный к 74 по модулю 47 используя расширенный алгоритм Евклида.
3. Существует ли решение уравнения $31x + 75y = 2345$ в неотрицательных целых числах?
4. Найдите количество положительных целых чисел, не превосходящих 10800, и взаимно простых с этим числом.
5. Найдите $\text{НОД}(3^{168} - 1, 3^{140} - 1)$.
6. Решите сравнение $x^3 \equiv x \pmod{125}$. (Решить сравнение по модулю q — найти все вычеты по модулю q , которые обращают данное сравнение в истинное.)
7. Докажите, что при любом нечетном положительном n число $2^{n!} - 1$ делится на n .
8. Докажите, что числитель несократимой дроби, равной $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p-1}$, делится на p для любого простого $p > 2$.
9. Докажите, что при любом $k \geq 1$ существует ровно 4 решения сравнения $x^2 \equiv x \pmod{10^k}$.
10. Вычислить $9^{6^{3979}} \pmod{19}$.