

## Неделя 16. Случайные величины и математическое ожидание

1. Бросают два кубика. Найдите математическое ожидание суммы выпавших очков.
2. Про неотрицательную случайную величину  $X$  известно, что  $\Pr[X < 5] = 1/2$  и  $\Pr[X > 5] = 1/2$ . Найдите возможные значения математического ожидания  $E[X]$ .
3. Том Соьер красит забор, состоящий из 20 досок. Покрасив очередную доску, он с вероятностью  $4/5$  переходит к следующей доске, а с вероятностью  $1/5$  уходит купаться (и больше забор не красит). Найдите математическое ожидание количества покрашенных досок. (Обратите внимание, что по правилам хотя бы одну доску он покрасит.)

**Указание.** решите задачу двумя способами: пользуясь только определением математического ожидания и используя свойство линейности (разложите искомую случайную величину в сумму вспомогательных).

4. Каждый элемент  $n$ -элементного множества с вероятностью  $p$  независимо от других включается в множество  $S_p$ . Найдите математическое ожидание числа элементов в множестве  $S_p$ .
5. Выбирается случайное десятиэлементное подмножество  $S$  целых чисел от 0 до 29. Найдите математическое ожидание суммы чисел, входящих в  $S$ .
6. Студент за выполнение домашней работы получает оценку от 1 до 10. Средняя оценка за серию домашних работ оказалась равной 6. Докажите, что доля работ, оценка за которые меньше 4, не превосходит  $4/7$ .
7. В неориентированном графе без петель и кратных ребер  $n$  вершин и  $nd/2$  ребер (то есть средняя степень вершины равна  $d$ ),  $d \geq 1$ . Докажите, что найдется такой циклический обход вершин графа  $(v_1 v_2 \dots v_n)$ , в котором каждая вершина встречается ровно один раз и более  $d/2$  из  $n$  пар  $(v_1, v_2)$ ,  $(v_2, v_3)$ ,  $\dots$ ,  $(v_{n-1}, v_n)$ ,  $(v_n, v_1)$  являются ребрами графа.
8. По 15 мальчиков и девочек стоят в шеренге в случайном порядке. Сколько в среднем девочек стоит левее всех мальчиков?
9. (Неравенство Чебышева.) Для случайной величины  $X$  обозначим  $M = E[X]$ ,  $D = E[X^2] - (E[X])^2$ . Докажите, что

$$\Pr[|X - M| \geq a] \leq \frac{D}{a^2}.$$

10. Вероятностное пространство состоит из двоичных строк длины  $n$ , все строки равновозможны. Докажите, что вероятность события «число единиц в строке отличается от  $n/2$  не меньше, чем на  $\sqrt{n}$ » не превосходит  $1/4$ .
11. Рассмотрим последовательность  $a_0, a_1, \dots, a_n$ , где каждое  $a_i \in \{0, 1\}^n$  — последовательность нулей и единиц длины  $n$ . Последовательность строится следующим образом. Первый член последовательности  $a_0 = (0, 0, \dots, 0)$  — последовательность из одних нулей. Каждый следующий член  $a_{i+1}$  получается из  $a_i$  заменой значения одной случайно выбранной координаты на противоположное. Рассмотрим случайную величину  $X$  — количество единиц в последовательности  $a_n$ . Найдите  $\lim_{n \rightarrow \infty} E[X]/n$ .

## Домашнее задание 16

Напоминаем, что ответы на вопросы должны быть обоснованы.

1. Игрок играет в казино в следующую игру. Делает ставку  $s$ , говорит крупье число от 1 до 6, после чего бросает три кубика. Если его число не выпало, то игрок ничего не получает. Если же число выпало, то игрок получает свою ставку обратно и получает выигрыш — за каждое выпадание числа, казино платит игроку ставку, которую он поставил. Так, если игрок поставил сто рублей и его число выпало два раза, то игрок получит выигрыш 200 рублей, а если не выпало ни разу, то его выигрыш — 100 рублей. Найдите математическое ожидание выигрыша игрока, при ставке 100 рублей.
2. В лотерее на выигрыши уходит 40% от стоимости проданных билетов. Каждый билет стоит 100 рублей. Докажите, что вероятность выиграть 5000 рублей (или больше) меньше 1%.
3. По таблицам смертности, составленным в 1693 г. Э. Галлеем, средняя продолжительность жизни была 26 лет. При этом вероятность прожить не больше 8 лет была  $1/2$ . Какова была средняя продолжительность жизни тех людей, которые прожили не меньше 8 лет? (Укажите интервал возможных при данных условиях значений, учитываются только полные годы.)
4. Выбирается случайное слово длины 20 в алфавите  $\{a, b\}$  (все слова равновозможны). Найдите математическое ожидание числа подслов  $ab$  в этом слове.
5. *Инверсией* в перестановке  $a_1 a_2 \dots a_n$  называется такая пара индексов  $i < j$ , что  $a_i > a_j$ . Пусть  $\pi$  — случайная перестановка (все перестановки равновозможны). Найдите математическое ожидание  $E[I(\pi)]$  количества инверсий  $I(\pi)$ .
6. Пусть  $X$  — неотрицательная случайная величина. Известно, что  $E[2^X] = 5$ . Докажите, что

$$\Pr[X \geq 6] < 1/10.$$

7. Вероятностное пространство — перестановки  $(x_1, \dots, x_n)$  элементов от 1 до  $n$ . Найдите математическое ожидание чисел, не поменявших своё место. Формально, случайная величина — количество элементов множества  $\{i \mid x_i = i\}$ .