Дискретная математика **Основной поток**

Неделя 16. Случайные величины и математическое ожидание

1. Бросают два кубика. Найдите математическое ожидание суммы выпавших очков.

2. Про неотрицательную случайную величину X известно, что $\Pr[X < 5] = 1/2$ и $\Pr[X > 5] = 1/2$. Найдите возможные значения математического ожидания $\mathrm{E}[X]$.

3. Том Сойер красит забор, состоящий из 20 досок. Покрасив очередную доску, он с вероятностью 4/5 переходит к следующей доске, а с вероятностью 1/5 уходит купаться (и больше забор не красит). Найдите математическое ожидание количества покрашенных досок. (Обратите внимание, что по правилам хотя бы одну доску он покрасит.)

Указание. решите задачу двумя способами: пользуясь только определением математического ожидания и используя свойство линейности (разложите искомую случайную величину в сумму вспомогательных).

4. Каждый элемент n-элементного множества с вероятностью p независимо от других включается в множество S_p. Найдите математическое ожидание числа элементов в множестве S_p.

5. Выбирается случайное десятиэлементное подмножество S целых чисел от 0 до 29. Найдите математическое ожидание суммы чисел, входящих в S.

6. Студент за выполнение домашней работы получает оценку от 1 до 10. Средняя оценка за серию домашних работ оказалась равной 6. Докажите, что доля работ, оценка за которые меньше 4, не превосходит 4/7.

7. В неориентированном графе без петель и кратных ребер n вершин и $nd/2$ ребер (то есть средняя степень вершины равна d), $d \geqslant 1$. Докажите, что найдется такой циклический обход вершин графа $(v_1 v_2 \dots v_n)$, в котором каждая вершина встречается ровно один раз и более $d/2$ из n пар (v_1, v_2), (v_2, v_3), $\dots$, (v_{n-1}, v_n), (v_n, v_1) являются ребрами графа.

8. По 15 мальчиков и девочек стоят в шеренге в случайном порядке. Сколько в среднем девочек стоит левее всех мальчиков?

9. (Неравенство Чебышева.) Для случайной величины X обозначим $M = \mathrm{E}[X]$, $D = \mathrm{E}[X^2] - (\mathrm{E}[X])^2$. Докажите, что

$$\Pr\big[|X - M| \geqslant a\big] \leqslant \frac{D}{a^2}\,.$$

10. Вероятностное пространство состоит из двоичных строк длины n, все строки равновозможны. Докажите, что вероятность события «количество единиц в строке отличается от $n/2$ не меньше, чем на $\sqrt{n}$» не превосходит 1/4.

11. Рассмотрим последовательность $a_0, a_1, \dots, a_n$, где каждое $a_i \in \{0,1\}^n$ — последовательность нулей и единиц длины n. Последовательность строится следующим образом. Первый член последовательности $a_0 = (0, 0, \dots, 0)$ — последовательность из одних нулей. Каждый следующий член a_{i+1} получается из a_i заменой значения одной случайно выбранной координаты на противоположное. Рассмотрим случайную величину X — количество единиц в последовательности a_n. Найдите $\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}[X]/n$.

12. Про неотрицательную случайную величину X известно, что $\Pr[X > 10] < 1/4$. Найдите возможные значения математического ожидания $\mathrm{E}[X]$.

13. Ася и Вася вырезают прямоугольники из клетчатой бумаги. Вася ленивый; он кидает игральную кость один раз и вырезает квадрат, сторона которого равна выпавшему числу очков. Ася кидает кость дважды и вырезает прямоугольник с длиной и шириной, равными выпавшим числам. У кого математическое ожидание площади прямоугольника больше?

14. На каждой из четырёх карточек написано натуральное число. Берут наугад две карточки и складывают числа на них. С равной вероятностью эта сумма может быть меньше 9, равна 9 и больше 9. Какие числа могут быть записаны на карточках?

Дискретная математика **Основной поток**

Домашнее задание 16

Напоминаем, что ответы на вопросы должны быть обоснованы.

1. Игрок играет в казино в следующую игру. Делает ставку c, говорит крупье число от 1 до 6, после чего бросает три кубика. Если его число не выпало, то игрок ничего не получает, т. е. проигрывает 100 рублей; считаем, что в этом случае его выигрыш равен -100. Если же число выпало, то игрок получает свою ставку обратно и получает выигрыш — за каждое выпадание числа, казино платит игроку ставку, которую он поставил. Так, если игрок поставил сто рублей и его число выпало два раза, то игрок получит выигрыш 200 рублей, а если не выпало ни разу, то его выигрыш равен -100 рублей. Найдите математическое ожидание выигрыша игрока, при ставке 100 рублей.

2. В лотерее на выигрыши уходит 40% от стоимости проданных билетов. Каждый билет стоит 100 рублей. Докажите, что вероятность выиграть 5000 рублей (или больше) меньше 1%.

3. По таблицам смертности, составленным в 1693 г. Э. Галлеем, средняя продолжительность жизни была 26 лет. При этом вероятность прожить не больше 8 лет была 1/2. Какова была средняя продолжительность жизни тех людей, которые прожили не меньше 8 лет? (Укажите интервал возможных при данных условиях значений, учитываются только полные годы.)

4. Выбирается случайное слово длины 20 в алфавите $\{a, b\}$ (все слова равновозможны). Найдите математическое ожидание числа подслов ab в этом слове.

5. *Инверсией* в перестановке $a_1a_2\ldots a_n$ называется такая пара индексов $i < j$, что $a_i > a_j$. Пусть π — случайная перестановка (все перестановки равновозможны). Найдите математическое ожидание $\mathrm{E}[I(\pi)]$ количества инверсий $I(\pi)$.

6. Пусть X — неотрицательная случайная величина. Известно, что $\mathrm{E}[2^X] = 5$. Докажите, что

$$\Pr[X \geqslant 6] < 1/10.$$

7. Вероятностное пространство — перестановки $(x_1, \ldots, x_n)$ элементов от 1 до n. Найдите математическое ожидание чисел, не поменявших своё место. Формально, случайная величина — количество элементов множества $\{i \mid x_i = i\}$.