

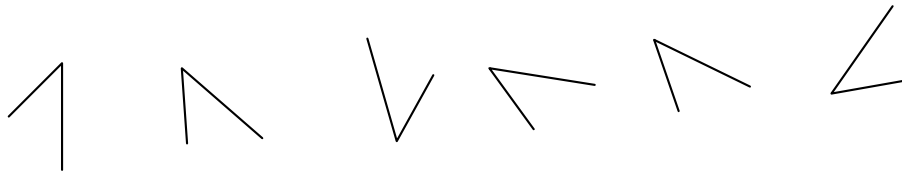
## Неделя 18. Несчётные мощности

1. Пусть множества  $A$  и  $B$  равномощны. Докажите, что множества  $A \times A$  и  $B \times B$  также равномощны.
2. Докажите, что множество  $\mathbb{R}^k$  равномощно  $\mathbb{R}$ .
3. Верно ли, что множество прямых на плоскости имеет мощность континуум?
4. Докажите, что множество бесконечных последовательностей из 0 и 1 равномощно множеству бесконечных последовательностей, состоящих из а) 0, 1, 2, 3; б) 0, 1, 2; в) произвольных натуральных чисел.
5. Установите взаимно однозначное соответствие между кругом без границы и кругом с границей.
6. Докажите, что множество непересекающихся восьмёрок на плоскости конечно или счётно. (Восьмёрка — это объединение двух касающихся внешним образом окружностей.)
7. Докажите, что множество бесконечных последовательностей действительных чисел равномощно  $\mathbb{R}$ .
8. Счётно ли множество бесконечных двоичных последовательностей  $b_0, b_1, \dots, b_n, \dots$ , в которых  
а) каждый отрезок чётной длины  $b_i, b_{i+1}, \dots, b_{i+2k-1}$  содержит поровну нулей и единиц?  
б) каждый отрезок нечётной длины  $b_i, b_{i+1}, \dots, b_{i+2k}$  содержит почти поровну нулей и единиц (модуль разности равен 1)?
9. Существует ли континуальное семейство непересекающихся континуальных подмножеств  $\mathbb{R}$ ?
10. Верно ли, что множество функций  $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$  имеет мощность континуум?
11. Докажите, что множество непрерывных функций  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  имеет мощность континуум.

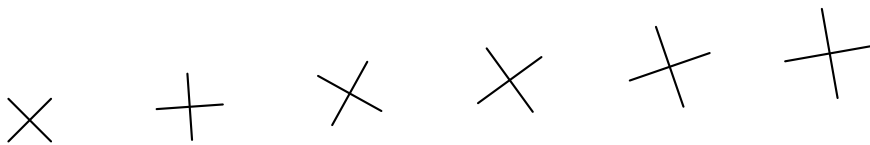
## Домашнее задание 18

Напоминаем, что ответы на вопросы должны быть обоснованы.

1. Пусть  $A$  – точка на плоскости. Рассмотрим множество всех окружностей с центром в  $A$ . Верно ли, что это множество имеет мощность континуум?
2. Докажите, что множество интервалов на прямой имеет мощность континуум.
3. Рассмотрим бесконечные последовательности из 0, 1 и 2, в которых никакая цифра не встречается два раза подряд. Верно ли, что мощность множества таких последовательностей имеет мощность континуум?
4. Верно ли, что множество сходящихся к 0 бесконечных последовательностей рациональных чисел имеет мощность континуум?
5. Докажите, что множество биекций  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  имеет мощность континуум.
6. Можно ли расположить на плоскости континуум непересекающихся равных единиц? (Единицами называются фигуры, изображённые на рисунке, то есть пары отрезков с общим концом.)



7. Крестом называется фигура, состоящая из двух диагоналей квадрата (см. рисунок). Можно ли расположить на плоскости континуум непересекающихся крестов (не обязательно одинакового размера)?



8. Углом на плоскости называется фигура, состоящая из точки и двух исходящих из неё лучей. Можно ли расположить на плоскости континуум непересекающихся углов, таких чтобы никакие два из них не имели одинаковую градусную меру?