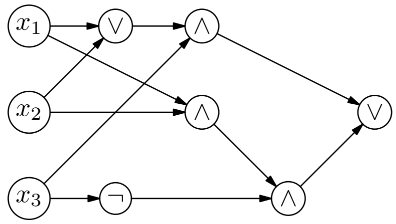
Неделя 19. Схемы и формулы. Полные базисы

1. Найдите функцию, которую вычисляет схема в стандартном базисе, представленная графически как



Многочленом Жегалкина называется формула вида

$$\bigoplus_{S\subseteq\{1,\ldots,n\}} a_S \bigwedge_{i\in S} x_i, \qquad a_S \in \{0,1\},$$

булевы значения a_S называются коэффициентами многочлена Жегалкина.

2. Постройте схему в стандартном базисе, реализующую функцию, заданную многочленом Жегалкина

$$1 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_1x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_2x_3 \oplus x_1x_2x_3.$$

3. Существует ли такая булева функция f от двух переменных, что схема в базисе $\{\wedge, f\}$

$$x_1,\ x_2,\ s_1 := f(x_1,x_2);\ s_2 := f(x_2,x_1);\ s_3 := s_1 \wedge s_2$$

вычисляет **а)** функцию x_1? **б)** функцию $x_1 \oplus x_2$?

4. Являются ли полными базисы

а) $\{\neg, \to\}$, где $\to$ — импликация?

б) $\{\wedge, \vee, \setminus\}$, где $x \setminus y$ равна $x \wedge \neg y$?

в) $\{1, \oplus\}$

г) $\{\neg; \equiv\}$, где $x \equiv y$ равна $(x \to y) \wedge (y \to x)$?

5. Назовём *функцией большинства* $\mathrm{MAJ}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ булеву функцию, значение которой совпадает с тем значением, которое принимает большинство переменных (если мнения разделились поровну, $\mathrm{MAJ} = 0$). Схемы в базисе $\{\vee, \wedge, 1, 0\}$ называются *монотонными*. Вычисляется ли MAJ монотонной схемой?

6. Булева функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется *самодвойственной* (или нечётной), если для всех $x_1, \ldots, x_n$ выполняется равенство

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \neg f(\neg x_1, \ldots, \neg x_n).$$

а) Являются ли самодвойственными функции $x_1 \vee x_2$, $x_1 \wedge x_2$?

б) Докажите, что схема в базисе, состоящем из самодвойственных функций, вычисляет самодвойственную функцию.

7. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — несамодвойственная функция. Докажите, что константы 0, 1 вычисляются в базисе $\{\neg, f\}$.

8. Докажите, что всякую булеву схему в стандартном базисе размера s с n переменными можно переделать в булеву схему, в которой все отрицания применяются только к переменным, и при этом размер новой схемы не превышает $p(s, n)$, где p – некоторый фиксированный полином.

Дискретная математика **Основной поток**

Домашнее задание 19

Напоминаем, что ответы на вопросы должны быть обоснованы.

1. Вычисляется ли константа 0 в базисе $\{\neg(x_1 \to x_2)\}$?

2. Вычислите $\mathrm{MAJ}(x, y, z)$ схемой в базисе Жегалкина $\{1, \wedge, x_1 \oplus x_2\}$. (Определение MAJ см. на обороте листа.)

3. Сколько ненулевых коэффициентов в многочлене Жегалкина, который равен $x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_n$?

4. Функция f вычисляется в базисе $\{\neg\mathrm{MAJ}(x_1, x_2, x_3), \mathrm{MAJ}(x_1, x_2, x_3)\}$ схемой

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ s_1 := \mathrm{MAJ}(x_1, x_2, x_3);\ s_2 := \neg\mathrm{MAJ}(x_1, x_2, x_3);\ s_3 := \neg\mathrm{MAJ}(s_1, s_2, s_1).$$

Найдите схему в том же базисе, которая вычисляет ту же функцию f, но содержит меньшее количество присваиваний.

5. Докажите полноту базиса, состоящего из одной функции $x \mid y$, которая по определению равна $\neg(x \wedge y)$ (*штрих Шеффера*, она же NAND).

6. Является ли полным базис $\{\vee; \to\}$ из дизъюнкции и импликации?

7. Является ли полным базис $\{\neg, \mathrm{MAJ}(x_1, x_2, x_3)\}$?

8. Булева функция $f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ называется *монотонной*, если для всяких $x, y \in \{0,1\}^n$ верно

$$x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y),$$

где векторы x и y сравниваются в покоординатном порядке: $x \leqslant y$ равносильно тому, что $x_i \leqslant y_i$ для всех i.

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — немонотонная функция. Докажите, что $\neg x_i$ вычисляется в базисе $\{0, 1, f\}$.

9. Докажите, что всякую монотонную булеву функцию можно вычислить монотонной схемой (определение см. на обороте листа).

10. Булева функция $f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ называется *линейной*, если она представляется в виде

$$f(x_1, \ldots, x_n) = a_0 \oplus (a_1 \wedge x_1) \oplus \cdots \oplus (a_n \wedge x_n)$$

для некоторого набора $(a_1, \ldots, a_n) \in \{0,1\}^n$ булевых коэффициентов.

Докажите, если $f(x_1, \ldots, x_n)$ — нелинейная функция, то конъюнкция $x_1 \wedge x_2$ вычисляется схемой в базисе $\{0, 1, \neg, f\}$.