Неделя 20. Эффективные схемы и разрешающие деревья

Если в условии задачи базис не указан, то нужно использовать схемы в стандартном базисе $\{\neg, \wedge, \vee\}$.

1. Постройте ДНФ и КНФ разложения для булевой функции, заданной вектором значений 10100110.

2. Постройте схему полиномиального размера для функции $\mathrm{MAJ}(x_1, \ldots, x_n)$. (Напомним, что эта функция равна 1 тогда и только тогда, когда больше половины её аргументов равны 1.)

3. Булева функция сравнения $L(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n)$ равна 1 тогда и только тогда, когда $(\overline{x_1, \ldots, x_n})_2 < (\overline{y_1, \ldots, y_n})_2$. Постройте схему размера $O(n)$, которая вычисляет $L(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n)$.

4. а) Постройте схему полиномиального размера, которая «сортирует» биты на входе: если на входе $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ какие-то k переменных принимают значение 1, то на выходе $(y_1, \ldots, y_n)$ первые k переменных равны 1, а остальные нули. **б)** Постройте описанную схему в базисе $\{\wedge, \vee\}$.

5. Среди n камней есть один радиоактивный. Счётчиком Гейгера мы можем проверить для любой кучки камней, если ли среди них радиоактивный. За какое наименьшее количество проверок можно найти радиоактивный камень?

6. В клетках шахматной доски написали в каком-то порядке числа от 1 до 64, каждое по одному разу. Про любое множество клеток доски мы можем спросить, какие числа на них стоят, и нам выдают полный список. За какое наименьшее количество вопросов можно понять, где какие числа стоят?

7. Вычисление булевой функции $f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ в модели разрешающих деревьев происходит следующим образом: за один вопрос разрешается спросить значение одной из переменных, в конце нужно объявить значение функции. Сложность вычисления функции — наименьшее количество вопросов в адаптивном (вопрос может зависеть от предыдущих ответов) протоколе, вычисляющем функцию.

а) Найдите сложность вычисления суммы по модулю два $\bigoplus_i x_i$ в модели разрешающих деревьев.

б) Пусть $n = k + 2^k$. Указательная функция $f(x_1, \ldots, x_k, y_0, \ldots, y_{2^k-1})$ равна y_x, где x — число, двоичная запись которого $x_1 \ldots x_k$. Докажите, что сложность вычисления f в модели разрешающих деревьев не превосходит $k+1$.

в) Докажите, что сложность вычисления функции f из предыдущего пункта не меньше $k+1$.

8. Постройте схему полиномиального размера для указательной функции.

9. Докажите, что всякую функцию $f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ можно вычислить булевой схемой размера **а)** $O(n2^n)$; **б)** $O(2^n)$.