Дневник лекций

«Дискретная математика-1» Основной поток ФКН НИУ ВШЭ. 2019-20 модуль 3

Неделя 13. Числа-2

Алгоритм Евклида и расширенный алгоритм Евклида для решения линейных диофантовых уравнений с двумя неизвестными, верхняя оценка на время работы алгоритма Евклида (по книге Дасгупты, Пападимитриу, Вазирани «Алгоритмы»). Китайская теорема об остатках. Функция Эйлера, теорема Эйлера (будет доказана в следующий раз).

Комментарий. На лекции я забыл озвучить важное свойство функции Эйлера для степени простого числа: $\phi(p^n) = p^n(1 - 1/p)$. Этим свойством можно пользоваться при решении домашнего задания.

Неделя 14. Вероятности (введение)

Были рассказаны обещанные долги по теории чисел. Вероятностное доказательство формулы $\phi(p^n) = p^n(1 - 1/p)$.

Вероятностное пространство и вероятностная модель (для случая конечного множества элементарных исходов). Правило суммы, переход от события к его дополнению, оценка вероятности объединения событий суммой их вероятностей, формула включений-исключений (без доказательства), почему нет прямого аналога правила произведения из комбинаторики. Схема последовательного выбора.

Неделя 15. Условная вероятность

Условная вероятность, формула Байеса, формула полной вероятности. Независимые события.

Неделя 16. Математическое ожидание случайной величины

Случайная величина, математическое ожидание случайной величины, два способа вычисления математического ожидания, линейность математического ожидания. Основные примеры: мат. ожидание числа выпавших орлов при подбрасывании пяти монет, мат. ожидание количества единиц в случайном подмножестве двоичных строк длины n и в случайном подмножестве размера k. Индикаторные случайные величины, парадокс дней рождений. Лемма о среднем (математическое ожидание не больше максимума и не меньше минимума). **Т.:** всякий граф имеет разрез не меньше $|E|/2$. Неравенство Маркова.

Неделя 17. Счётные множества

Алгоритм хэширование на основе теории чисел (прикладное применение вероятности в алгоритмах, окончание предыдущей темы). Определение равномощности. Счётность множеств чётных чисел, квадратов натуральных чисел, целых чисел рациональных чисел.

Леммы о счётных множествах

- Объединение счётных множеств счётно.
- Любое подмножество счётного множество конечно или счётно
- Любое бесконечное множество содержит счётное подмножество
- Если $f A \to B$ — сюръекция и A — счётно, а B — бесконечно, то B счётно.
- Декартово произведение счётных множеств счётно.

Теорема. Конечное или счётное объединение конечных или счётных множеств конечно или счётно. Формально, пусть $\mathcal{F}$ — конечное или счётное семейство множеств и каждое множество $A \in \mathcal{F}$ конечно или счётно. Тогда множество $\bigcup\limits_{A \in \mathcal{F}} A$ — конечно или счётно.

Неделя 18. Множества мощности континуум

Теорема Кантора-Бернштейна. Определение множеств мощности континуум (множество континуально, если равномощно $\mathbb{R}$).

Леммы о равномощности следующих множеств (явные биекции)

- любые два отрезка (ненулевой длины) равномощны
- любые два (непустых) интервала равномощны
- полуинтервал $[0, 1)$ равномощен лучу $[0; +\infty)$
- интервал $(0; 2\pi)$ равномощен $\mathbb{R}$
- множества $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$ и (a, b) равномощны ($a \neq b$)

Общие леммы и теоремы

- Объединение бесконечного множества A со счётным множеством B равномощно A
- Множество бесконечных двоичных последовательностей $\{0,1\}^{\omega}$ равномощно отрезку $[0,1]$
- Множество $[0,1] \times [0,1]$ равномощно $[0,1]$ (квадрат равномощен отрезку)
- Множество бесконечных двоичных последовательностей $\{0,1\}^{\omega}$ не счётно (т. Кантора)

Неделя 19. Схемы и формулы. Полные базисы

Определения булевых схем через последовательность присваиваний (в стандартном базисе в том числе с помощью графов). Полный базис, полнота стандартного базиса $\{\wedge, \vee, \neg\}$ — построение ДНФ и КНФ.

Монотонные функции. Неполнота монотонного базиса $\{\wedge, \vee\}$. Нижняя оценка на число монотонных булевых функций: монотонных булевых функций от $2n$ переменных не меньше $2^{\frac{2^n}{2n+1}}$

Полиномы Жегалкина. Существование и единственность полинома Жегалкина (в стандартном виде) для любой булевой функции.

Неделя 20. Булевы схемы-2. Нижние оценки

- Верхняя оценка $O(n2^n)$ схемной сложности булевой функции от n переменных.
- Булевы схемы для сложения и умножения n-битовых чисел. Оценка размера.
- Булева схема для задачи о связности графа. Оценка размера.
- Задача об угадывании числа. Верхняя и нижняя оценки.
- Задача о сортировке нижняя оценка.
- Задача о нахождении самой тяжелой монеты. Верхние и нижние оценки.
- Задача о поиске прообраза монотонной функции. Нижняя оценка.