

Время экзамена: 2 часа 40 минут. Все ответы и утверждения должны быть строго обоснованы. При использовании утверждений из курса их необходимо указывать явно.

1. Существуют ли такие множества $X, Y \subseteq \mathbb{N}$, что X разрешимо, $X \cup Y$ разрешимо, а Y не разрешимо? Дайте обоснованный ответ.
2. Сколько существует различных простых неориентированных графов на 10 вершинах v_1, \dots, v_{10} с 4 ребрами, таких, что все ребра сходятся в одной вершине (т.е. существует вершина, которая является концом всех четырех ребер графа)? Ответом должно быть число. Ответ должен быть обоснован.
3. Существует ли главная (гёделева) универсальная вычислимая функция $U: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, такая что множество номеров $\{n \mid U_n(x) = U(n, x) \text{ — нигде не определенная функция}\}$ совпадает с множеством четных чисел? Обоснуйте ответ.
4. Пусть дана система подстановок в некотором конечном алфавите, в которой для каждой подстановки $L \rightarrow R$ в ее левой части L стоит буква, а в ее правой части R стоит непустое слово. Докажите, что задача достижимости в графе, заданном этой системой подстановок, разрешима. Необязательно (и даже нежелательно) приводить описание МТ, решающей эту задачу, или код на любом другом языке программирования. Обязательно обоснование корректности алгоритма.
5. В графе G на множестве вершин $\{0, 1, \dots, 66\}$ ребром соединены пары вершин x, y , для которых выполняется $13(x-y) \equiv \pm 4 \pmod{67}$. Является ли граф G связным? Обоснуйте ответ.
6. Пусть дан неубывающий числовой массив $a[1], \dots, a[n]$, то есть $a[i] \leq a[i+1]$ для всякого i . Разрешается за один ход сравнить любые два элемента массива. Требуется проверить, есть ли в массиве равные элементы. Найдите минимальное количество вопросов, достаточное для такой проверки. Дайте обоснованный ответ.
7. Таблица из n столбцов и $n+1$ строки заполняется числами ± 1 по следующему правилу. Первая строка таблицы полностью заполняется числами 1. Строка с номером $i+1$ получается из строки с номером i так: в одном случайно и равновероятно выбранном столбце значение меняется на противоположное, а в остальных столбцах значения сохраняются. Случайная величина X равна сумме чисел в последней $(n+1)$ -й строке таблицы. Найдите $\lim_{n \rightarrow \infty} E[X]/n$. Дайте обоснованный ответ.
8. Докажите, что для всех достаточно больших n существует монотонная булева функция $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$, которую нельзя вычислить схемой размера меньше n^{100} . (Булева функция f называется монотонной, если из неравенств $x_i \leq y_i$ для всех i следует неравенство $f(x_1, \dots, x_n) \leq f(y_1, \dots, y_n)$.)

Группа			ФИО				
1	2	3	4	5	6	7	8