Дискретная математика. Основной поток **Итоговый экзамен, 28.03.16**

Время экзамена: 2 часа 40 минут. Все ответы и утверждения должны быть строго обоснованы. При использовании утверждений из курса их необходимо указывать явно.

1. Вероятность события A равна 0.8, вероятность события B равна 0.5, а вероятность события $A \cup B$ равна 0.9. Найдите условную вероятность $\Pr[A \mid B]$.

2. Сколькими способами можно расставить числа от 1 до 9 в последовательность так, чтобы чётные числа 2, 4, 6, 8 шли раньше чисел 5, 7, 9? Ответом должно быть число в десятичной записи.

3. Булева функция $f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ равна 1 тогда и только тогда, когда последовательность ее аргументов $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ неубывающая. Докажите, что существует схема в стандартном базисе размера $O(n)$, вычисляющая f_n.

4. Счётно ли множество бесконечных последовательностей $(x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ целых чисел, в которых для любого i выполняется равенство $x_{i+1}x_i = x_i^2$?

5. Функция $f\colon \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ сопоставляет двоичной строке x строку $1^{\Delta(x)}$, где $\Delta(x)$ — модуль разности между количеством нулей и единиц в строке x. Не ссылаясь на тезис Чёрча–Тьюринга, докажите существование машины Тьюринга, которая вычисляет функцию $f(x)$. (Многоленточные машины Тьюринга также допустимы.)

6. Докажите, что найдется целое число, которое в десятичной системе счисления записывается одними цифрами 7 и при этом делится на 121.

7. Существует ли такая универсальная вычислимая функция $U\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, что все программы, вычисляющие всюду определенные функции, имеют только четные номера? То есть, если $U(n, x)$ определена при всех x, то n чётное.

8. Для простого неориентированного графа G с множеством вершин V и множеством ребер E обозначим через d среднюю степень вершины в графе, то есть $d = \sum_{v \in V} d(v)/|V|$. Рассмотрим вероятностное пространство, исходами в котором являются пары (e, v), где v является одним из концов ребра e (т.е. элементами вероятностного пространства являются концы ребер). Все исходы равновероятны. Случайная величина D на исходе (e, v) принимает значение $d(v)$.

Пусть средняя степень графа равна $d = 20$ и по крайней мере 1% вершин имеют степень ≥ 1000. Докажите, что $\mathrm{E}[D] \geq 500$.

Группа	ФИО						
1	2	3	4	5	6	7	8