Дискретная математика. Пилотный поток **Итоговый экзамен, 28.03.16**

Время экзамена: 2 часа 40 минут. Все ответы и утверждения должны быть строго обоснованы. При использовании утверждений из курса их необходимо указывать явно.

1. Пусть дан простой неориентированный граф G. Рассмотрим следующее отношение R на множестве его вершин V: $(u, v) \in R$ тогда и только тогда, когда есть путь из u в v нечетной длины. Для всякого ли G отношение R является отношением эквивалентности?

2. Сколько существует таких троек (x, y, z), что $x, y, z \in \{1, 2, \ldots, 21\}$ и

$$x \cdot y \cdot z \equiv 5 \pmod{21}?$$

Ответом должно быть число.

3. Булева функция $f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ равна 1 тогда и только тогда, когда последовательность ее аргументов $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ неубывающая. Докажите, что существует булева схема размера $O(n)$, вычисляющая f_n.

4. Счётно ли множество бесконечных последовательностей $(x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ целых чисел, в которых для любого i выполняется равенство $x_{i+1}x_i = x_i^2$?

5. Рассмотрим простой неориентированный граф на 100 вершинах, в котором каждые две вершины соединены ребром. Два игрока по очереди удаляют по одному ребру из графа. Игрок проигрывает, если после его хода граф становится несвязным. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

6. Пусть $K \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ – некоторое множество. Определим множество $L \subseteq \mathbb{N}$ следующим образом: $x \in L$ тогда и только тогда, когда существуют $y, z \geq x$, такие что $(y, z) \in K$. Пусть множество K разрешимо. Докажите, что множество L разрешимо.

7. Определим функцию $S \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ следующим образом: $S(n)$ равно максимальному числу шагов, которое делает на пустом входе какая-либо останавливающаяся машина Тьюринга с не более чем n состояниями и в алфавите размера не больше n. Докажите, что функция S невычислима.

8. Для простого неориентированного графа G с множеством вершин V и множеством ребер E обозначим через d среднюю степень вершины в графе, то есть $d = \sum_{v \in V} d(v)/|V|$. Рассмотрим вероятностное пространство, исходами в котором являются пары (e, v), где v является одним из концов ребра e (т.е. элементами вероятностного пространства являются концы ребер). Все исходы равновероятны. Случайная величина D на исходе (e, v) принимает значение $d(v)$.

Пусть средняя степень графа равна $d = 20$ и по крайней мере 1% вершин имеют степень ≥ 1000. Докажите, что $\mathrm{E}[D] \geq 500$.

Группа	ФИО

1	2	3	4	5	6	7	8