Дискретная математика. Основной поток **Итоговый экзамен, 28.03.17**

Время экзамена: 2 часа 40 минут. Все ответы и утверждения должны быть строго обоснованы. При использовании утверждений из курса их необходимо указывать явно.

1. Полином Жегалкина булевой функции от 2016 переменных содержит все слагаемые 2015 степени и только их. Сколько конъюнктов содержит ее СДНФ?

2. Пусть p и q — простые числа-близнецы, т.е. $p = q + 2$. Какой остаток дает $q!$ при делении на pq?

3. Существуют ли невычислимые всюду определенные функции $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, такие что их произведение вычислимо? В этой задаче вычислимость и невычислимость можно обосновывать неформально, не обязательно проводить рассуждения с машинами Тьюринга.

4. Рассмотрим булевы схемы от переменных $x_1, \ldots, x_n$ с одним выходом, использующие одну операцию конъюнкции (от двух переменных) и произвольное количество операций взятия отрицания. Сколько различных функций от переменных $x_1, \ldots, x_n$ можно вычислить такими схемами? Функции, которые можно получить друг из друга переименованием переменных считаются разными. Например, $x_1 \wedge x_2$ и $x_3 \wedge x_4$ — разные функции от переменных $x_1, \ldots, x_n$. Ответом в задаче должно быть число в десятичной записи.

5. Найдите мощность множества сюрьекций из $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

6. Существует ли машина Тьюринга с алфавитом $\{0, 1, \Lambda\}$, проверяющая четность числа единиц на ленте? Машина начинает работу с конфигурации $q_0 w$, где w — слово в алфавите $\{0, 1, \Lambda\}$ и заканчивает в конфигурации $q_f 0$, если в w входит четное число единиц и $q_f 1$, если нечетное.

7. Докажите, что в полном графе на $2n$ вершинах существует n остовных деревьев, таких, что каждое ребро графа входит только в одно дерево.

8. Колода из 36 карт поровну раздается четырем игрокам. Пусть A — событие, относящееся к картам первого игрока, а B — второго, причем оба события нетривиальны, т.е. их вероятность отлична от 0 и 1. Могут ли A и B быть независимы?

Формально. Порядок карт на руках не важен, т.е. вероятностное пространство — все возможные разбиения (S_1, S_2, S_3, S_4) множества карт на четыре 9-элементных подмножества. Все элементарные события равновозможны. Событие A зависит только от карт первого игрока, если из $(S_1, S_2, S_3, S_4) \in A$ следует $(S_1, S_2', S_3', S_4') \in A$ для любых возможных S_2', S_3', S_4'.

Группа	ФИО

1	2	3	4	5	6	7	8