

Время экзамена: 2 часа 40 минут. Все ответы и утверждения должны быть строго обоснованы. При использовании утверждений из курса их необходимо указывать явно.

1. Решите уравнение  $238x + 385y = 133$  в целых числах. Решения, в которых частное решение уравнения было угадано, оценивается не более чем в  $\mp$ .
2. Турниром называют ориентированный граф, в котором каждая пара вершин соединена ровно одним ребром. Какое максимальное число вершин с исходящей степенью ноль может содержать турнир с 2017 вершинами?
3. Про множества  $A, B, C$  известно, что симметрическая разность любых двух из них содержит третье. Верно ли, что какие-то два из этих множеств не пересекаются?
4. Существует ли множество  $A$  и отношение  $R \subseteq A \times A$ , такие что отношение  $R \circ R$  транзитивно, а отношение  $R$  — не транзитивно?
5. Докажите, что неравенство  $k^k(n - k)^{(n-k)} \binom{n}{k} \leq n^n$  справедливо для любых  $n > k \geq 1$ .

**Указание.** Можно привести комбинаторное доказательство, используя слова длины  $n$  над алфавитом из  $n$  букв.

6. Вершины неориентированного графа  $G$  — числа  $\{0, 1, \dots, 326\}$ . Между вершинами  $x$  и  $y$  есть ребро тогда и только тогда, когда  $|x - y| \equiv 3 \pmod{327}$ . Содержит ли некоторый связный подграф  $H$  графа  $G$  эйлеров цикл? При положительном ответе укажите максимальное количество вершин в таком подграфе.
7. Найдите количество (необязательно всюду определённых) функций  $f$  из  $\{1, \dots, 7\}$  в  $\{1, \dots, 7\}$ , таких что  $f(\{1, 2, 3\}) = \{4, 5, 6\}$  и  $f^{-1}(\{1, 2, 3\}) = \{4, 5, 6\}$  (на  $f(7)$  и  $f^{-1}(7)$  дополнительных ограничений нет). Ответом на вопрос задачи должно быть число в десятичной записи.
8. Дан простой неориентированный двудольный граф  $G$ , вершины которого поделены на доли  $A$  и  $B$ . Паросочетанием называется любое подмножество ребер в графе, никакие два ребра в котором не имеют общих концов. Паросочетание покрывает вершину графа, если оно содержит ребро, смежное этой вершине. В  $G$  есть два паросочетания. Докажите, что есть третье, которое покрывает все вершины первого паросочетания из доли  $A$  и все вершины второго паросочетания из доли  $B$ .

Группа			ФИО				
1	2	3	4	5	6	7	8