Дискретная математика. Основной поток **Итоговый экзамен, 30.03.18**

Время экзамена: 2 часа 40 минут. Все ответы и утверждения должны быть строго обоснованы. При использовании утверждений из курса их необходимо указывать явно.

1. Про множества A, B и C известно, что множество $(A \cup B) \setminus C$ континуально, $(A \cup C) \setminus B$ континуально, а $(B \cup C) \setminus A$ счетно. Может ли множество $B \cup C$ быть счетным? Если может, приведите пример, если не может — докажите это.

2. Неориентированный путь состоит из вершин $v_0, v_1, \ldots, v_4$. Вершины пути равновероятно и случайно красятся в 4 цвета. Найдите вероятность того, что все вершины, находящиеся на расстоянии 1 или 2, покрашены в разные цвета.

3. Функция $F(t)$ равна нулю при $t \le \lfloor n/3 \rfloor$ и равна 1 при $t > \lfloor n/3 \rfloor$. Определим булеву функцию

$$f(x_1, \ldots, x_n) = F\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right).$$

Докажите, что функция f вычислима схемой полиномиального размера.

4. Сколько существует упорядоченных пар (x, y) остатков по модулю 11, таких что $x^2 \equiv y^2 \pmod{11}$?

5. Пусть X и Y — конечные множества. Даны две всюдуопределенные функции $f, g\colon X \to Y$. Известно, что f является инъекцией, а g — сюръекцией. Верно ли, что для всякого $A \subseteq X$ выполняется $|g^{-1}(f(A))| \ge |A|$? Если не верно, приведите пример f, g и A, для которых неравенство не верно. Если верно — докажите это.

6. Функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ вычислима и для неё перечислимо множество точек $D \subseteq \mathbb{N}$, в которых она не определена ($D = \{x \mid f(x) = \uparrow\}$). Следует ли отсюда, что множество $f^{-1}(\mathbb{N})$ разрешимо?

7. При изготовлении ожерелья используют 6 белых и 6 чёрных бусинок. Их надевают на нить в случайном порядке (все расстановки бусин на нити равновероятны), после чего концы нити завязывают и все бусины оказываются расположены по кругу. Найдите математическое ожидание числа чёрных бусин, обе соседние бусины которых белые.

8. Разрешимо ли множество описаний МТ, которые на всех входах выдают ответ, причем на всех входах один и тот же? (В этой задаче требующиеся алгоритмы можно описывать неформально, не обязательно строить машину Тьюринга.)

Группа	ФИО

1	2	3	4	5	6	7	8