Дискретная математика, основной поток.Краткие решения задач экзамена 28.03.17

1. Полином Жегалкина булевой функции от 2016 переменных содержит все слагаемые 2015 степени и только их. Сколько конъюнктов содержит ее СДНФ?

Решение.

Найдем, на каких наборах переменных эта функция истинна. Если в наборе переменных не менее двух нулей, то все слагаемые (и стало быть, сумма) равны 0. Если ложна ровно одна переменная, то ложны все слагаемые, кроме одного и сумма истинна. Если все переменные истинны, то истинны и все слагаемые, а сумма равна 0, как сумма 2016 единиц. Итак, функция истинна ровно на 2016 наборах переменных.

Число конъюнктов в СДНФ равно числу единиц в таблице истинности, т.е. 2016.

2. Пусть p и q — простые числа-близнецы, т.е. $p = q + 2$. Какой остаток дает $q!$ при делении на pq?

Решение. *Ответ*: $q(q + 1)/2$.

Искомый остаток (a) должен давать остаток 0 при делении на q и 1 при делении на p (по лемме Вильсона). Первое означает, что a делиться на q, т.е. $a = qr$. Итак $qr \equiv 1 \pmod p$. Но $q \equiv -2 \pmod p$. Поэтому надо решить уравнение $2r \equiv -1 \pmod p$. Такой остаток единственен и равен (тут проще угадать) $(p - 1)/2$.

3. Существуют ли невычислимые всюду определенные функции $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, такие что функция $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ для всех $x \in \mathbb{N}$ вычислима? В этой задаче вычислимость и невычислимость можно обосновывать неформально, не обязательно проводить рассуждения с машинами Тьюринга.

Решение. *Ответ*: да, существует.

Приведем пример такой пары функций.

Пусть $K \subseteq \mathbb{N}$ — неразрешимое множество. В курсе было доказано, что такое множество существует. Также было доказано, что если K неразрешимо, то и его дополнение $\mathbb{N} \setminus K$ неразрешимо.

Поскольку K неразрешимо, то его характеристическая функций

$$\chi_K(x) = \begin{cases} 1, & x \in K, \\ 0, & x \notin K, \end{cases}$$

невычислима (также доказывалось в лекциях). Аналогично невычислима характеристическая функция $\chi_{\mathbb{N}\setminus K}$.

Положим $f(x) = \chi_K(x)$ и $g(x) = \chi_{\mathbb{N}\setminus K}(x)$. Тогда функции f и g невычислимы, а функция $h(x) = f(x) \cdot g(x) = 0$ вычислима, поскольку тождественно равна 0 (для всякого $x \in \mathbb{N}$ ровно одна из функций χ_K и $\chi_{\mathbb{N}\setminus K}$ равна нулю на x).

4. Рассмотрим булевы схемы от переменных $x_1, \dots, x_{10}$ с одним выходом, использующие одну операцию конъюнкции (от двух переменных) и произвольное количество операций взятия отрицания. Сколько различных функций от переменных $x_1, \dots, x_{10}$ можно вычислить такими схемами? Функции, которые можно получить друг из друга переименованием переменных считаются разными. Например, $x_1 \wedge x_2$ и $x_3 \wedge x_4$ – разные функции от переменных $x_1, \dots, x_{10}$. Ответом в задаче должно быть число в десятичной записи.

Решение. *Ответ*: 382.

Введем обозначения $x^1 = x$ и $x^0 = \neg x$.

Если в схеме используется только операция отрицания, то всякий элемент схемы есть либо переменная, либо отрицание предыдущего элемента. Поскольку $\neg\neg x = x$, то все элементы такой схемы есть либо переменные, либо их отрицания, то есть всякий элемент схемы является литералом.

Если в схеме используется одна операция взятия конъюнкции, то все элементы до нее получаются лишь с помощью применения отрицания. Так что единственная операция конъюнкции может применяться только к переменным или их отрицаниям. Результатом применения такой конъюнкции может быть функция $(x_i^a \wedge x_j^b)$, где $a, b \in \{0, 1\}$. После операции конъюнкции в схеме вновь могут использоваться только отрицания, так что все последующие элементы схемы есть либо переменные, либо их отрицания, либо вычисленная конъюнкция, либо ее отрицание. В частности, выход схемы также имеет один из перечисленных видов.

Переберем все эти случаи и посчитаем, сколько различных функций вычисляется в каждом из них. Различных переменных и их отрицаний всего 20 штук.

Вычисленная конъюнкция или ее отрицание в общем виде имеют вид $(x_i^a \wedge x_j^b)^c$. Если $i = j$ то полученная функция есть либо переменная, либо ее отрицание, либо константа 0 или 1 (в случае, если $a \neq b$). Переменные и их отрицания мы уже посчитали, так что в этом случае добавляется еще 2 функции: константы 0 и 1.

Если $i \neq j$, то полученные функции существенно зависят от двух переменных и отличаются от переменных, их отрицаний и констант. Для каждой пары $\{i, j\}$ при различных значениях $a, b, c \in \{0, 1\}$ получается 8 различных функций $(x_i^a \wedge x_j^b)^c$. Действительно, если $c = 1$, то указанная функция равна единице только при $x_i = a, x_j = b$. Аналогично, если $c = 0$, то указанная функция равна нулю только при $x_i = a, x_j = b$. Любые две такие функции различаются. Количество способов выбрать пару $\{i, j\}$ равно $\binom{10}{2} = 45$, для каждой пары получается 8 различных функций. Всего в этом случае получается $8 \cdot 45 = 360$ функций.

Суммарно во всех случаях получается $20 + 2 + 360 = 382$ функции.

5. Найдите мощность множества сюрьекций из $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Решение. *Ответ*: Континуум.

Воспользуемся теоремой Кантора-Бернштейна. Множество сюрьекций содержит множество инъекций и, в свою очередь, содержится во множестве всех функций. На лекциях и семинарах доказывалось, множества всех функций и биекций континуальны.

6. Докажите, что в полном графе на $2n$ вершинах существует n остовных деревьев, таких, что каждое ребро графа входит только в одно дерево.

Решение.

Проведем доказательство индукцией по n.

Для $n = 1$ граф состоит из двух вершин и сам является своим остовным деревом.

Пусть утверждение доказано для полного графа на $2n$ вершинах. Рассмотрим полный граф на $2n + 2$ вершинах. Разобьем его вершины на два равных множества и обозначим их $v_0, v_1, \ldots, v_n$ и $u_0, u_1, \ldots, u_n$. Рассмотрим полный подграф на вершинах $v_1, \ldots, v_n, u_1, \ldots, u_n$. По предположению индукции в нем есть n остовных деревьев, никакие два из которых не имеют общих ребер. Обозначим эти деревья через $T_1, \ldots, T_n$. Для каждого i добавим к дереву T_i ребра $\{u_0, v_i\}$ и $\{v_0, u_i\}$. В результате получим n остовных деревьев в изначальном графе на $2n + 2$ вершинах. Легко видеть, что никакие два из этих деревьев не имеют общих ребер.

Построим еще одно остовное дерево T_0. Для этого соединим вершины u_0 и v_0, вершину u_0 соединим со всеми вершинами $u_1, \ldots, u_n$, а вершину v_0 — со всеми вершинами $v_1, \ldots, v_n$. Нетрудно видеть, что T_0 является остовным деревом и не имеет общих ребер с деревьями $T_1, \ldots, T_n$.

7. Существует ли машина Тьюринга с алфавитом $\{0, 1, \Lambda\}$, проверяющая четность числа единиц на ленте? Машина начинает работу с конфигурации $q_0 w$, где w — слово в алфавите $\{0, 1, \Lambda\}$ и заканчивает в конфигурации $q_f 0$, если в w входит четное число единиц и $q_f 1$, если нечетное.

Решение. *Ответ*: нет, не сущесвует.

Пусть такая машина Тьюринга существует. Тогда на пустой ленте она останавливается через n шагов. Рассмотрим конфигурацию $q_0 \Lambda^{n+1} 1$. МТ на этой конфигурации будет работать так же, как и на пустой ленте, поскольку до единственной единицы не дойдет и выдаст 0. А должна 1.

8. Колода из 36 карт поровну раздается четырем игрокам. Пусть A — событие, относящееся к картам первого игрока, а B — второго, причем оба события нетривиальны, т.е. их вероятность отлична от 0 и 1. Могут ли A и B быть независимы?

Решение. *Ответ*: могут.

Общая идея — одно из событий должно относиться к мастям, другое — к достоинствам карт. Проще всего проверить из соображений симметрии.

Пусть A — "у первого игрока больше красных карт, чем черных а B — "у второго игрока все 4 туза".

Тогда из соображений симметрии $Pr[A] = Pr[\overline{A}] = 1/2$. Но то же рассуждение проходит без изменений и для $Pr[A|B]$, т.е. $Pr[A|B] = Pr[A] = 1/2$, что и означает независимость событий A и B.